

# **MODELO NUMÉRICO PARA SIMULACIÓN DE FLUJOS TORRENCIALES AGUAS ARRIBA DE PRESAS DE RETENCIÓN DE SEDIMENTOS**

Jean Carlos Rincón, José Luis López y Reinaldo García

Departamento de Hidráulica, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado

Instituto de Mecánica de Fluidos, Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela

E-mail: jcrincon@ucla.edu.ve - E-mail: jlopez@imf.ing.ucv.ve - E-mail: regarcia@hydronia.com

## **RESUMEN**

En este trabajo se desarrolla un modelo numérico para la simulación del flujo torrencial y el transporte de sedimentos en canales de alta pendiente en presencia de presas abiertas o cerradas para retención de sedimentos. Se utiliza el esquema de MacCormack-TVD para resolver simultáneamente las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento para la fase líquida y la fase sólida de un flujo no permanente en un canal unidimensional. El modelo permite calcular transiciones del flujo subcrítico a supercrítico y viceversa, ubicando automáticamente la localización del resalto hidráulico. El modelo se aplica para generar las condiciones finales de equilibrio morfodinámico en cauces sujetos a procesos de agradación y degradación del lecho con cambios en el régimen de flujo, y los resultados se validan mediante comparación con soluciones analíticas. Se realizan ensayos experimentales en el laboratorio para monitorear el crecimiento y desplazamiento de un delta de sedimentos generado aguas arriba de una presa. Los resultados numéricos se comparan satisfactoriamente con las mediciones efectuadas en el laboratorio.

## **ABSTRACT**

A numerical model for simulation of torrential flows and sediment transport in steep channels in the presence of sediment retention dams is developed. The MacCormack-TVD numerical scheme is used to solve simultaneously the continuity and momentum equations for the liquid and solid phases in a one-dimensional-unsteady-flow channel. The model allows for calculation of flow transitions between subcritical and supercritical regimes and vice versa, locating automatically the position of the hydraulic jump. The model is applied to generate final equilibrium conditions in a channel bed subject to aggradation or degradation processes with changes in the flow regime, and the model results are validated by comparison with analytical solutions. Experimental test are conducted in a laboratory flume to monitor the growing and displacement of a sediment delta generated upstream of a retention dam. Computed and measured values are compared with satisfactory results.

## **INTRODUCCIÓN**

Las altas pendientes longitudinales de los cauces torrenciales, aunadas con los grandes elementos de rugosidad (peñones) existentes en el lecho, generan flujos supercríticos o cercanos al régimen crítico los cuales se caracterizan por presentar gran turbulencia acompañada de inestabilidades en la superficie del agua. El control de los flujos torrenciales requiere frecuentemente de la construcción de presas para reducir los procesos erosivos del lecho o para la retención de los grandes volúmenes de sedimentos arrastrados por las corrientes. Las presas elevan el nivel de la superficie del agua, reducen la velocidad del flujo y generan remansos en los tramos inmediatos aguas arriba del dique induciendo a la sedimentación del material grueso arrastrado. Si el régimen de flujo de aproximación a una presa de retención de sedimentos es supercrítico, se produce un cambio de régimen acompañado de un resalto hidráulico aguas arriba de la presa que puede oscilar o desplazarse aguas abajo con el paso de las crecientes. Las inestabilidades superficiales características del régimen crítico, y el resalto hidráulico que ocurre en las transiciones del flujo supercrítico a subcrítico, son difíciles de tratar numéricamente y requieren de un tratamiento particular a fin de que no afecten el cálculo de los perfiles de la superficie libre y de las deformaciones del

lecho.

García y Kahawita (1986) desarrollaron un modelo matemático que resuelve las ecuaciones del movimiento en dos dimensiones utilizando una versión del esquema explícito de MacCormack y mostraron su aplicabilidad para tratar diversos problemas en flujo rápidamente variado. Bhallamudi y Chaudhry (1991) presentaron un modelo unidimensional del flujo no-permanente, gradualmente variado, de agua y sedimentos, para evaluar problemas de agradación y degradación del lecho de cauces aluviales, utilizando el esquema explícito de MacCormack. El modelo fue aplicado para determinar la respuesta del lecho a diferentes condiciones de contorno en régimen subcrítico. Los resultados numéricos compararon adecuadamente con los resultados experimentales. García-Navarro et al. (1992) utilizan el esquema TVD-MacCormack para resolver las ecuaciones de Saint Venant en canales con presencia de frentes de ondas y resaltos hidráulicos, mostrando comparaciones con soluciones analíticas que dieron resultados satisfactorios. Kusakabe et al. (1995) desarrollan un modelo para determinar las variaciones del lecho en canales de pendiente fuerte en presencia de transiciones en el régimen de flujo, usando el esquema de MacCormack con un término de viscosidad artificial. El trabajo incluye una aplicación para simular la sedimentación en un embalse y recomendaciones para optimizar el coeficiente de viscosidad artificial. Busnelli et al., (2001) aplican un modelo morfológico para simular el flujo de agua y sedimentos aguas arriba de una presa abierta. El modelo se basa en una solución implícita a las ecuaciones del movimiento y es verificado con datos obtenidos mediante ensayos experimentales en laboratorio. Papanicolau et al., (2004) desarrollan un modelo hidrodinámico de flujo no-permanente para ríos de montaña que considera el transporte multifraccional de sedimentos y emplea nuevos criterios para el movimiento incipiente y la resistencia al flujo. El modelo es utilizado para predecir cambios granulométricos del lecho y cambios morfológicos de cauces conformados por secuencias de pozos y rápidos.

Pocos modelos se encuentran en la literatura para calcular los cambios morfológicos que ocurren aguas arriba de presas de retención de sedimentos considerando las transiciones en el régimen de flujo que ocurren en ríos de montaña. En este trabajo se desarrolla un modelo numérico de fondo móvil basado en el uso del esquema de MacCormack-TVD para simular el flujo torrencial en canales de alta pendiente en presencia de presas abiertas o cerradas. El modelo resuelve simultáneamente las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento para la fase líquida y la fase sólida de un flujo no permanente en un canal unidimensional. El modelo se aplica para evaluar la respuesta morfodinámica a problemas de agradación y degradación del lecho causada por variaciones en las condiciones de contorno en casos donde se producen cambios en el régimen de flujo, y los resultados se validan con soluciones analíticas y experimentales en el laboratorio.

## ECUACIONES BÁSICAS

Las ecuaciones diferenciales parciales para un flujo unidimensional, no permanente, en un canal con fondo deformable son las siguientes.

La ecuación de continuidad del agua:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_l \quad (1)$$

donde  $A$  representa al área del flujo,  $Q$  es el caudal total,  $q_l$  es el caudal lateral,  $t$  es el tiempo y  $x$  es la distancia.

La ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(QV) + gA \frac{\partial y}{\partial x} = gA(S_o - S_f) \quad (2)$$

donde  $V$  es la velocidad media del flujo,  $g$  es la gravedad,  $S_o$  es la pendiente de fondo del canal y  $S_f$  es la pendiente de la línea de energía.

La ecuación de continuidad del sedimento:

$$\frac{1}{1 - \lambda_p} \frac{\partial q_s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

donde  $q_s$  es el transporte sólido por unidad de ancho calculado con alguna de las fórmulas de arrastre (en unidades de volumen),  $z$  representa la cota de fondo del cauce y  $\lambda_p$  la porosidad del sedimento.

La fricción puede ser estimada según la ecuación propuesta por Aguirre-Pe (1990) para calcular el coeficiente de Darcy-Weisbach  $f_b$ :

$$\sqrt{\frac{8}{f_b}} = 2.5 \ln\left(\frac{d}{D_{50}}\right) + 3.09 + 1.75\left(\frac{D_{50}}{d}\right) \quad (4)$$

donde  $d$  representa la profundidad del flujo y  $D_{50}$  es el diámetro representativo del sedimento del lecho. El coeficiente de rugosidad de Manning puede ser obtenido directamente de la expresión:

$$n = \frac{R^{2/3} \times f_b^{1/2}}{\sqrt{8gR}} \quad (5)$$

donde  $R$  es el radio hidráulico.

La descarga de sedimentos es estimada mediante la ecuación de Schoklitsch:

$$q_b = \frac{2.5}{(\rho_s/\rho)} S_f^{3/2} \left( q - 0.15 \times S_f^{-1.12} \times \sqrt{g \times D_{50}^3} \right) \quad (6)$$

donde  $q_b$  es el caudal sólido volumétrico,  $q$  es el caudal líquido por unidad de ancho,  $\rho_s$  es la densidad de las partículas de sedimentos, y  $\rho$  es la densidad del agua.

## ESQUEMA NUMÉRICO

El esquema de MacCormack es un esquema explícito de dos pasos predictor – corrector (Kahawita y García, 1986) de segundo orden de precisión tanto en tiempo como en espacio y es capaz de capturar choques o discontinuidades sin aislarse. El esquema puede ser aplicado para el análisis de flujos no permanentes en canales abiertos que involucren transiciones del régimen y discontinuidades como los resaltos hidráulicos. En el modelo se incluye un tercer paso que es el esquema de variación total decreciente (TVD) que introduce una disipación adicional a fin de controlar las oscilaciones espurias que se producen en flujos con discontinuidades hidráulicas.

Las ecuaciones gobernantes en la forma conservativa pueden ser escritas en forma matricial como:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{S} = 0 \quad (7)$$

donde,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ VA \\ z \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} VA \\ V^2 A + gA\bar{y} \\ \frac{1}{1-\lambda_p} q_b \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gA(S_0 - S_f) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

y se desprecia el aporte lateral del caudal.

El método de MacCormack se usa para resolver simultáneamente, en cada paso de tiempo, las ecuaciones gobernantes (8) en un modelo tipo acoplado. Las ecuaciones diferenciales se transforman en ecuaciones algebraicas usando el esquema de tres pasos de MacCormack-TVD.

### Paso Predictor

$$\mathbf{U}_i^* = \mathbf{U}_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_i^k - \mathbf{F}_{i-1}^k) - \mathbf{S}_i^k \Delta t \quad (9)$$

en donde el superíndice k se refiere a un paso de tiempo k donde las variables son conocidas. Al calcular  $\mathbf{U}_i^*$  se obtienen los valores de  $A^*$  y  $Q^*$ , y su vez se pueden determinar los valores de  $V^*$  y  $y^*$ . El mismo procedimiento se sigue para todos los nodos computacionales. Estos valores son usados en la parte corrector para calcular  $\mathbf{F}^*$  y  $\mathbf{S}^*$ .

### Paso Corrector

$$\mathbf{U}_i^{**} = \mathbf{U}_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^* - \mathbf{F}_i^*) - \mathbf{S}_i^* \Delta t \quad (10)$$

en el cual el superíndice \*\* se refiere a los valores de las variables después del paso corrector. El valor de  $\mathbf{U}_i$  en el nivel de tiempo desconocido  $k+1$  es:

$$\mathbf{U}_i^{k+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^* + \mathbf{U}_i^{**}) \quad (11)$$

Al calcular  $\mathbf{U}_i^{k+1}$  se obtienen los valores de  $A_i^{k+1}$  y  $Q_i^{k+1}$ .

### Paso TVD

Como es sabido, los esquemas de segundo o mayor orden, como el caso del esquema de MacCormack, producen oscilaciones espurias de la solución en zonas cercanas a grandes gradientes, y en particular en zonas cercanas a discontinuidades de la solución. Las oscilaciones pueden ir aumentando al transcurrir el tiempo y provocar que el esquema numérico sea inestable, producir valores de profundidad negativos o simplemente malas aproximaciones a la realidad. Este fenómeno se conoce con el nombre de dispersión numérica.

Una condición menos estricta es el concepto de variación total decreciente (Total Variation Diminishing o TVD) que es un método racional para la determinación de los términos de dispersión artificial y que asegura la convergencia de la solución numérica. El esquema TVD lo que realiza es una nueva corrección a los valores obtenidos a través del esquema explícito de segundo orden, en este caso, el método de MacCormack, en otras palabras, una vez aplicado el paso predictor y corrector a todos los nodos de la malla se aplica el esquema TVD.

$$Q_{TVD_i}^{k+1} = Q_i^{k+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (DCM_{i+1}^{k+1} - DCM_i^{k+1}) \quad (12)$$

$$A_{TVD_i}^{k+1} = A_i^{k+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (DC_{i+1}^{k+1} - DC_i^{k+1}) \quad (13)$$

donde  $DCM$  y  $DC$  son los factores de corrección por TVD (ver Anexo I).

Para la estabilidad del esquema, es necesario que el número de Courant,  $C_n$ , sea menor o igual a uno, donde:

$$C_n = \frac{|V| \pm c}{\Delta x / \Delta t} \quad (14)$$

Por tanto, el intervalo de tiempo computacional depende del intervalo espacial entre las secciones, de la velocidad del flujo y de la celeridad la cual es función de la profundidad del flujo. Si la profundidad y la velocidad del flujo cambian significativamente durante la simulación, es necesario reducir el tamaño del intervalo de tiempo computacional para mantener la estabilidad. El intervalo de tiempo debe ser tal que  $C_n$  sea lo más cercano a 1 como sea posible.

### PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO

El modelo requiere de los siguientes datos a ser definidos en un archivo de entrada de extensión .dat: número de nodos computacionales o secciones de cálculo, tipo de canal, características geométricas de cada nodo, coeficiente de rugosidad de cada nodo, diámetro promedio de las partículas de fondo, condiciones de contorno aguas arriba y aguas abajo del canal, condiciones iniciales, fórmula de transporte de sedimentos, intervalo de tiempo para la simulación, intervalo de impresión y tiempo total de simulación.

Las condiciones de contorno aguas arriba pueden ser un hidrograma de caudales o un hidrograma de niveles, mientras que las condiciones de contorno aguas abajo se establecen con las ecuaciones que regulan el flujo sobre una presa cerrada, una presa abierta ranurada o una presa abierta de ventana.

Si la presa es cerrada el modelo requiere la siguiente información: Altura de la presa y el ancho del aliviadero. La profundidad en el extremo aguas abajo de la presa es calculada asumiendo descarga a través de un vertedero de cresta delgada, a través de la ecuación:

$$Q = \frac{2}{3} \times C_g \sqrt{2g} \times B \times h^{3/2} \quad (15)$$

donde  $h$  es la carga por encima del vertedero y  $C_g$  el coeficiente de descarga.

El coeficiente de descarga según Aguirre (1974), puede ser calculado con suficiente aproximación según las siguientes ecuaciones obtenidas de análisis experimentales:

$$C_d = 0.611 + 0.075 \frac{h}{P} \quad \text{si } \frac{h}{P} < 10 \quad (16)$$

$$C_d = 1.06 \left(1 + \frac{P}{h}\right)^{3/2} \quad \text{si } \frac{h}{P} > 20 \quad (17)$$

donde  $P$  es la altura del vertedero.

De la ecuación anterior, conocido el caudal de aproximación se calcula  $h$  y al sumarle la altura de la presa se obtiene la profundidad en el contorno aguas abajo.

Si la presa es abierta ranurada el modelo requiere la siguiente información: Ancho de la ranura y coeficiente de pérdidas por contracción. La ranura se asume como una contracción y la profundidad en el extremo aguas abajo se obtiene aplicando energía y conservación de la masa entre el último nodo y una sección en la ranura suponiendo en esta última condiciones críticas.

$$h + \frac{Q^2}{2gA^2} = 1.5 \times \left(\frac{Q^2}{B_c^2 g}\right)^{1/3} \quad (18)$$

donde  $B_c$  es el ancho de la ranura. De esta ecuación se despeja  $h$  y se obtiene la profundidad en el extremo aguas abajo.

Si la presa es abierta de ventana el modelo requiere los siguientes datos: altura de la ventana, ancho de la ventana, altura de la presa, ancho del vertedero y el coeficiente de pérdidas por contracción. En esta condición se pueden presentar tres casos: el primer caso es cuando el nivel del agua es menor que la altura de la ventana, en esta situación la descarga se comporta como una presa abierta de tipo ranurada y el cálculo se hace como en el ítem anterior. El siguiente caso es cuando el nivel del agua es mayor que la altura de la ventana pero menor que la cresta del vertedero; en este escenario la profundidad en el extremo aguas abajo de la presa es calculada asumiendo descarga de fondo. El último caso es cuando el nivel del agua sobrepasa la cresta del vertedero y se produce descarga simultánea de fondo y por vertedero. La ecuación a emplear para la descarga de fondo es la siguiente:

$$Q = C_g \times A_o \times \sqrt{2 \times g \times h} \quad (19)$$

donde  $A_o$  es el área de la ventana.

Si la descarga es simultánea, la profundidad en el extremo aguas abajo se calcula sumando las ecuaciones (15) y (19).

El cálculo de  $C_g$  se hace según la siguiente ecuación obtenida mediante correlación:

$$C_g = 0.1226190 \times \left(\frac{b}{h}\right)^2 - 0.2217857 \times \frac{b}{h} + 0.6107381 \quad (20)$$

El procedimiento de cálculo del modelo se puede resumir como sigue: el modelo lee los datos y parámetros iniciales que constituyen los valores para el tiempo igual a cero. Luego incrementa el tiempo en un intervalo  $\Delta t$  y calcula los pasos predictor MacCormack, corrector MacCormack y TVD para cada uno de los nodos en el que fue dividido el canal, tomando en cuenta para el primer y último nodo las condiciones de contorno establecidas por el usuario tanto aguas arriba como aguas abajo. Luego, si el intervalo de salida coincide con el intervalo de resultados, guarda los resultados para ese intervalo de tiempo en un archivo de salida e incrementa el tiempo un intervalo más. Se repite el mismo procedimiento descrito hasta alcanzar el tiempo total de simulación.

Para la implementación computacional del modelo, se ha hecho uso de un código fuente desarrollado por Reinaldo García (García y Kahawita, 1986), el cual resuelve las ecuaciones en forma no acoplada, es decir, primero se calculan las variables del flujo y luego se calculan los cambios en el lecho. El programa ha sido modificado para resolver simultáneamente las ecuaciones dadas por la ecuación (8) en un modelo tipo acoplado, incorporándole diferentes condiciones de contorno y fórmulas de transporte sólido, para determinar las variaciones del fondo considerando la presencia de presas de control de sedimentos. El modelo desarrollado en Fortran 90 está compuesto por un programa principal y diecinueve subrutinas.

## APLICACIONES DEL MODELO

### *Caso 1: Ubicación del resalto hidráulico en flujo permanente*

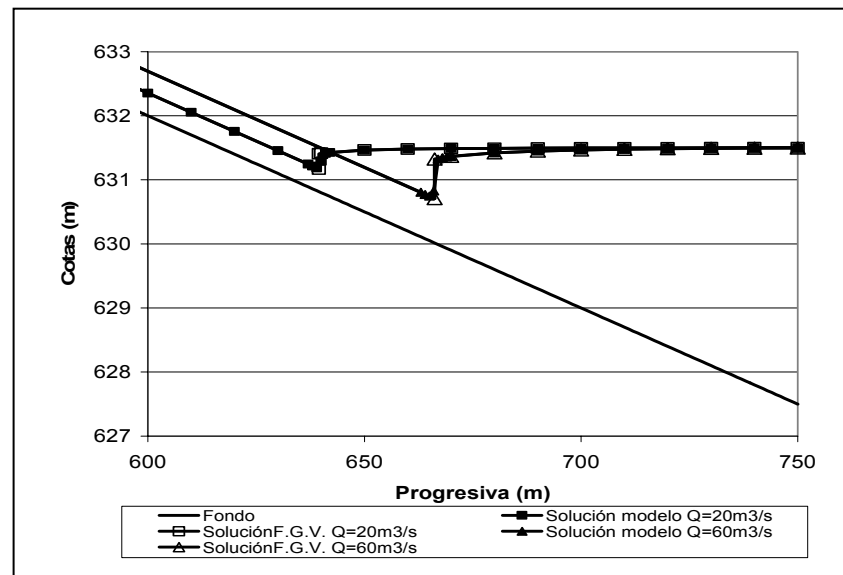
Este caso se analiza para verificar si el modelo es capaz de calcular flujos a través de un resalto hidráulico y ubicar la posición del mismo en un canal de pendiente fuerte. La verificación se realiza para un canal de rectangular de 20 m de ancho, pendiente de fondo igual a 3%, coeficiente de Manning de 0,030 y caudal inicial de 20 m<sup>3</sup>/s. Para estas condiciones, la altura crítica es de 0,47 m y la altura normal es de 0,35 m, siendo supercrítico el flujo uniforme. La condición de contorno aguas arriba viene dada por un hidrograma de caudales: Q=20 m<sup>3</sup>/s entre 0 y 1 hora, luego asciende a 60 m<sup>3</sup>/s entre 1 y 1,5 horas y se mantiene constante de allí en adelante. La condición de contorno aguas abajo corresponde a un nivel constante de agua por encima de la altura normal (h = 4 m). Datos adicionales son: Longitud del canal L= 750 m;  $\Delta x$  es variable, igual a 10 m entre las progresivas 0 y 350 m, e igual a 1 m entre las progresivas 350 m y 750 m;  $\Delta t = 0,01$  sg para garantizar un número de Courant < 1. Las condiciones iniciales son: caudal Q = 20 m<sup>3</sup>/s y profundidad de 0,35 m para todos los nodos.

Los resultados de modelo se comparan con el cálculo del flujo permanente gradualmente variado. Se desarrolla un perfil tipo S1 que se calcula desde la profundidad de control aguas abajo hasta la altura crítica, ubicándose la posición del resalto en el sitio de igualdad de fuerzas específicas. Como puede observarse en la Figura 1, el modelo reproduce

adecuadamente la forma abrupta del resalto hidráulico y lo ubica en la misma posición que indica el cálculo del flujo gradualmente variado.

### Caso 2: Agradación debido a sobrecarga de sedimentos

Se analiza el caso de un canal inicialmente en equilibrio al cual se le impone como condición de contorno aguas arriba una carga de sedimentos por encima de su capacidad de transporte. La idea es verificar si el modelo es capaz de alcanzar una nueva condición de equilibrio como respuesta al incremento en el aporte de sedimentos. La comprobación se hace vía analítica, ya que al conocer la carga de sedimentos entrando al canal, se puede calcular la nueva pendiente de equilibrio a partir de una ecuación para régimen uniforme (ecuación de Manning), de la ecuación de continuidad y de la ecuación de transporte sólido. Los datos para este caso son: canal rectangular  $B = 20$  m;  $n = 0.03$ ;  $S_o = 0.5\%$ ;  $L = 750$  m;  $\Delta x =$  variable en el tiempo, 10 m para un tiempo menor a 50 h y 50 m para un tiempo mayor de 50 h;  $\Delta t =$  variable en el tiempo, 1 seg para un tiempo menor a 50 h y 5 seg para un tiempo mayor de 50 h ( $\text{Courant} < 1$ ).

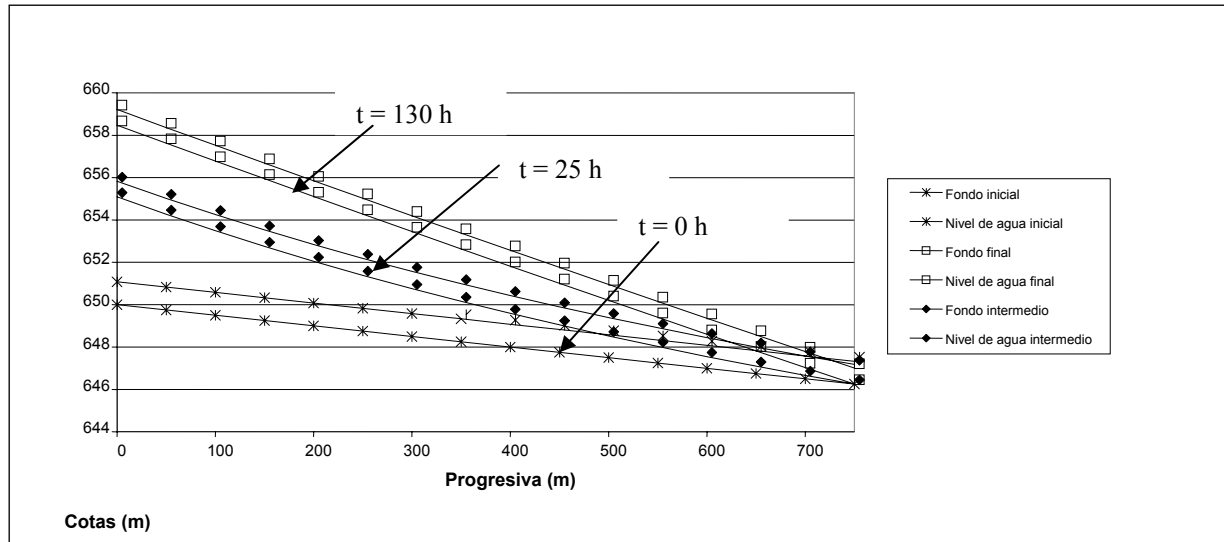


**Figura 1.-** Ubicación de resalto hidráulico. Perfiles del agua calculados con el modelo y analíticamente para un flujo gradualmente variado (FGV) (Caso 1).

Las condiciones iniciales están dadas por un caudal de  $50 \text{ m}^3/\text{s}$  y una profundidad normal de 1,08 m para todos los nodos, correspondiendo a un régimen subcrítico. La altura crítica es de 0,86 m. La condición de contorno aguas arriba es un caudal invariable en el tiempo e igual a  $50 \text{ m}^3/\text{s}$  y una carga de sedimentos constante e igual a 250% de la capacidad inicial de transporte. La condición de contorno aguas abajo es una relación de flujo uniforme (Manning). Para el arrastre de sedimentos se supone una relación empírica entre la capacidad de transporte en  $\text{kg/s}$  y la velocidad de flujo, dada por:

$$Q_s = 100 \times V^{2.4} \quad (21)$$





**Figura 2.-** Variación en el tiempo de los perfiles del lecho y de la superficie libre para el caso de agradación debido a sobrecarga de sedimentos (Caso 2).

Se supone que el cauce ha alcanzado un equilibrio con el aporte de sedimentos dado aguas arriba, y ese aporte de sedimentos se aumenta bruscamente en  $t=0$ . De la Figura 2 se observa que la respuesta morfodinámica a la sobrecarga de sedimentos es la agradación del cauce. El flujo comienza a depositar el sedimento en los tramos superiores para aumentar su pendiente y su capacidad de transporte hasta igualarse a la carga de entrada y así lograr una nueva condición de equilibrio morfodinámico. El perfil de fondo transiente en proceso de agradación es cóncavo y el flujo es gradualmente variado. La figura muestra el perfil intermedio del flujo y del fondo para  $t = 25$  horas. La pendiente original de 0,005 es aumentada progresivamente hasta estabilizarse en una pendiente uniforme con una profundidad de 0,74 m. La pendiente final de equilibrio calculada analíticamente fue de 0,017 y la calculada por el modelo fue de 0,0165, correspondiente a un régimen uniforme supercrítico. El equilibrio se alcanza después de 130 horas de simulación. El régimen de flujo, inicialmente subcrítico, cambia a supercrítico debido al incremento en la pendiente del lecho.

### *Caso 3: Degradación debido a déficit de sedimentos*

En este caso, contrario al caso previo, se desea determinar la respuesta morfodinámica a un aporte de sedimentos por debajo de la capacidad de transporte del cauce. La comprobación se hizo también de manera analítica y similar al caso anterior, para los datos siguientes: canal rectangular  $B = 20$  m,  $n = 0,03$ ,  $S_0 = 3\%$ ,  $L = 750$  m,  $\Delta x =$  variable en el tiempo, 10 m para un tiempo menor a 50 h y 100 m para un tiempo mayor de 50 h,  $\Delta t =$  variable en el tiempo, 1 seg para un tiempo menor a 50 h y 13 seg para un tiempo mayor de 50 h para garantizar un número de Courant menor que la unidad. La fórmula de transporte de sedimentos es la misma que para el caso de sobrecarga de sedimentos. Las condiciones iniciales son un caudal de  $50 \text{ m}^3/\text{s}$  y una profundidad normal de 0,62 m para todos los nodos. Para este caudal, la profundidad crítica es 0,86 m por lo que el flujo uniforme es supercrítico. La condición de contorno aguas arriba es una caudal constante en el tiempo e igual a  $50 \text{ m}^3/\text{s}$  y un caudal de sedimentos constante e igual a 25% de la capacidad inicial de transporte. La condición de contorno aguas abajo corresponde a la ecuación de Manning (flujo uniforme).

Los resultados se muestran en la Figura 3. El déficit en el aporte de sedimentos origina un proceso de degradación que se inicia aguas arriba y se transmite hacia aguas abajo. La erosión del canal origina una disminución en la pendiente de fondo y por consiguiente una disminución de la velocidad de flujo, acompañada de un aumento en la profundidad y una disminución de la capacidad de transporte. El perfil de fondo transiente en proceso de degradación es convexo y el flujo es gradualmente variado. La figura muestra el perfil intermedio del flujo y del fondo para  $t = 25$  horas. El proceso de degradación continúa hasta que la capacidad de transporte en todas las secciones del canal se iguala al aporte sólido a la entrada del canal y se establece de nuevo el régimen uniforme para una nueva condición de equilibrio. El flujo se estabiliza para una profundidad uniforme de 1,11 m en todas las secciones del canal. Utilizando la ecuación de flujo uniforme (Manning), la ecuación de continuidad, y la ecuación de transporte (ecuación 21), se obtiene analíticamente una pendiente final de equilibrio de 0,0047. La pendiente final generada por el modelo fue de 0,0048. Para estas condiciones el flujo es uniforme y subcrítico. El equilibrio morfodinámico se alcanza después de 184 horas de simulación.

#### Caso 4: Descarga permanente a un embalse a través de un canal con pendiente supercrítica

En esta aplicación se desea analizar la respuesta morfodinámica del cauce a la presencia de un control aguas abajo ejemplarizado por un nivel de agua constante por encima de la profundidad normal del canal, tal como pudiera ser el caso del remanso producido por el embalse de una presa o de un lago. El objetivo es generar una nueva condición de equilibrio a partir de mantener constantes el caudal líquido y el caudal sólido entrando al sistema. Los cálculos fueron realizados para un canal de sección rectangular de ancho  $B = 20$  m,  $n = 0,03$ ,  $S_o = 3\%$ ,  $L = 750$  m, cuyo régimen uniforme es supercrítico (Froude = 1,6). La capacidad de transporte se supone dada por la ecuación (21).

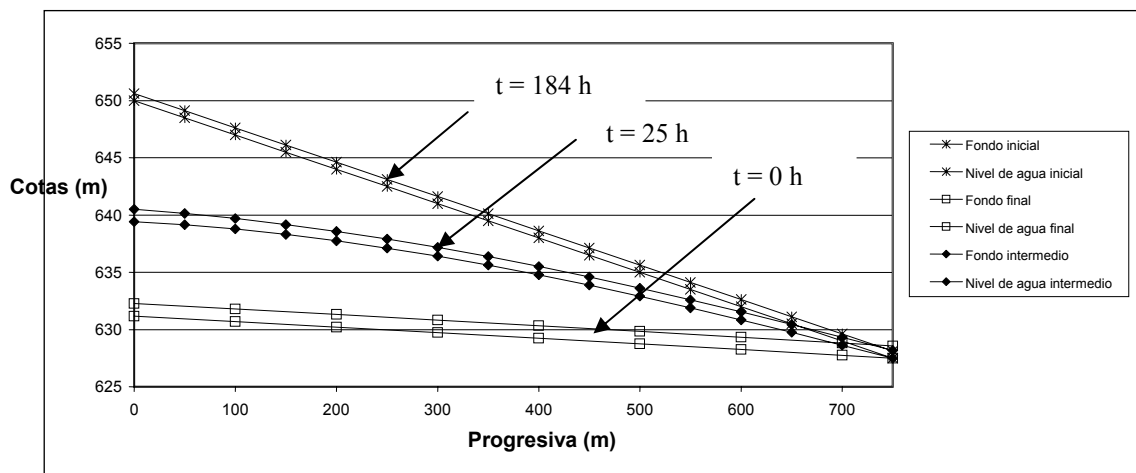


Figura 3.- Variación en el tiempo de los perfiles del lecho y de la superficie libre para el caso de degradación debido a déficit de sedimentos (Caso 3).

Como condiciones iniciales se establecen un caudal de  $50 \text{ m}^3/\text{s}$  y unas profundidades generadas por el modelo para la condición de flujo permanente, correspondientes a un flujo uniforme que se conecta a un perfil gradualmente variado, tipo S1, a través de un resalto hidráulico. La condición de contorno aguas arriba es un caudal constante en el tiempo e igual a  $50 \text{ m}^3/\text{s}$  y un aporte de sedimentos constante e igual a la capacidad inicial de transporte en esa sección, dada por la ecuación (21). Para  $Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $S_o = 3\%$ , la velocidad inicial es  $4.03 \text{ m/s}$  y la capacidad de transporte inicial es  $2836.17 \text{ kg/s}$ . La condición de contorno aguas

abajo viene dada por un nivel constante de la superficie libre que se encuentra 3,75 m por encima del fondo del canal.

Para mantener la estabilidad del esquema numérico y al mismo tiempo poder alcanzar la condición final de equilibrio, fue necesario utilizar intervalos variables en la distancia y en el tiempo.  $\Delta x$  igual a 1 m y 10 m para un tiempo menor a 1.85 h; igual a 10 m para tiempos entre 1.85 h y 40 h y a 50 m para un tiempo mayor a 40 h. También variable en distancia para tiempos menores a 1.85 h: 10 m para progresivas menores a 350 m y 1 m para progresivas mayores a 350 m.  $\Delta t$  igual a 0.075 seg para un tiempo menor a 1.85h, 1.5 seg para tiempos entre 1.85 h y 40 h y 6 seg para tiempos mayores a 40h.

En la Figura 4 se pueden observar diferentes etapas durante el proceso de sedimentación de canal. Se supone que el perfil del fondo se encuentra en equilibrio con el caudal sólido de entrada antes de elevar el nivel del agua. Para  $t = 0$  se eleva bruscamente el nivel de agua, y esa condición es representada por el primer gráfico de la Figura 4. Un delta de sedimentos se genera en el sitio donde se localiza el resalto hidráulico y el delta comienza a crecer verticalmente y a desplazarse hacia aguas abajo. El resalto también se desplaza aguas abajo y se debilita a medida que crece el delta lo cual se observa en el segundo gráfico de la Figura 4 para  $t = 1$  hora. El remanso creado por el embalse se incrementa debido al avance del delta y una onda de sedimentos comienza simultáneamente a desplazarse hacia aguas arriba, iniciándose la sedimentación del tramo superior. Esto se observa en el gráfico para  $t = 1,85$  h, donde el delta ha alcanzado el sitio del lago llenando todo el espacio dejado por el remanso. A partir de este momento se intensifica el proceso de agradación en el canal aguas arriba. La superficie libre comienza a pivotar alrededor del punto de control (nivel constante de agua en el embalse) aumentando gradualmente su gradiente hidráulico hasta alcanzar un valor igual a la pendiente original de canal ( $S_o = 3\%$ ). Simultáneamente el perfil del lecho también pivotea alrededor del punto de máxima sedimentación al pie de la presa y aumenta paulatinamente su pendiente hasta alcanzar la nueva pendiente de equilibrio, igual a la pendiente original de 3%. En este momento se restablecen las condiciones de régimen uniforme en todo el canal y se alcanza el equilibrio morfodinámico en  $t = 113$  horas. Todo el canal ha incrementado su elevación en 3,1 m, siendo este valor igual al remanso producido por el lago ( $\Delta h = 3,1$  m). La altura de sedimentos en el lago es igual a la diferencia de niveles entre la profundidad normal y la profundidad del agua en el lago al comienzo del proceso. El delta lo que ha hecho es llenar de sedimentos los espacios creados por el remanso del embalse.

#### *Caso 5: Agradación aguas arriba de una presa cerrada en flujo no-permanente*

En este caso se desea analizar la respuesta morfológica del cauce al paso de una creciente por un tramo aguas arriba de una presa cerrada. Se suponen los siguientes datos para la aplicación del modelo. Canal rectangular de ancho  $B = 20$  m,  $n = 0,03$ ,  $S_o = 3\%$ ,  $L = 750$  m. Se usa la fórmula de Schoklitsch para calcular el transporte de sedimentos (ecuación 6). Las condiciones iniciales vienen dadas por un caudal de  $5 \text{ m}^3/\text{s}$  y las profundidades correspondientes al perfil calculado por flujo permanente gradualmente variado para ese caudal. La altura normal es 0,15 m y el Número de Froude es de 1,37, por lo que el flujo de aproximación es supercrítico. La condición de contorno aguas arriba es un hidrograma de flujo tal que  $Q = 5 \text{ m}^3/\text{s}$  para  $t = 0$ , aumenta a  $Q = 60 \text{ m}^3/\text{s}$  entre las 0 h y 1.5 h, y luego descende a  $Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$  entre las 1,5 h y las 3 h (Figura 5). La condición de contorno aguas abajo es la fórmula que gobierna el flujo a través de una presa cerrada, suponiendo vertedero de pared delgada (ecuaciones 15, 16 y 17). La altura de la presa es de 2,7 m y el ancho del

vertedero es de 20 m. Se supone una porosidad del sedimento igual a 0,5 y un peso específico de  $2650 \text{ Kg/m}^3$  para las partículas de sedimento con un diámetro  $D_{50} = 0,009 \text{ m}$ . El intervalo espacial  $\Delta x$  es variable con la distancia, igual a 50 m para progresivas menores a 500 m y a 1,5 m para progresivas mayores a 500 m. El intervalo  $\Delta t = 0,1 \text{ seg}$ .

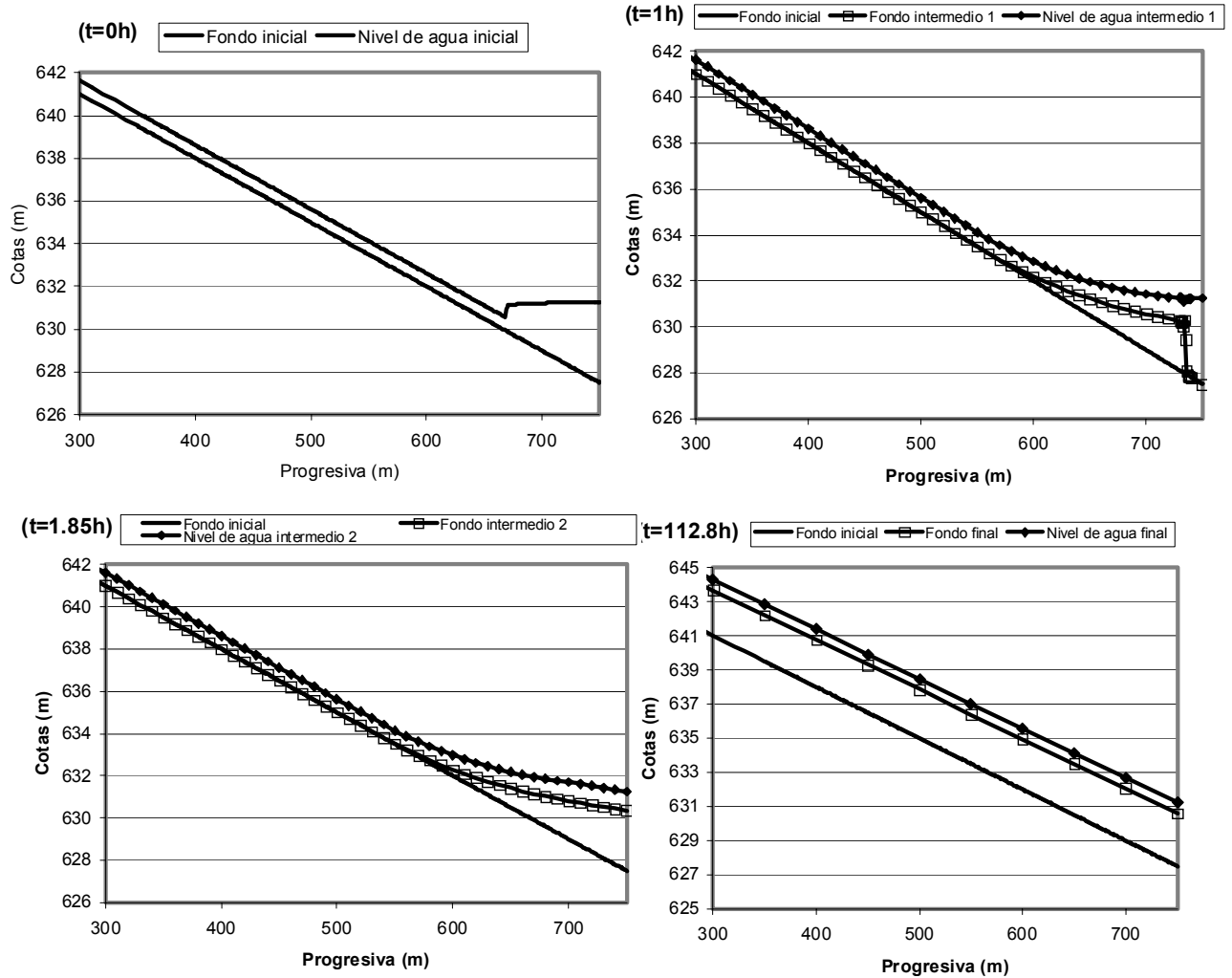


Figura 4.- Variación en el tiempo de los perfiles del lecho y de la superficie libre para el caso de descarga a un embalse a través de un canal con pendiente supercrítica (Caso 4).

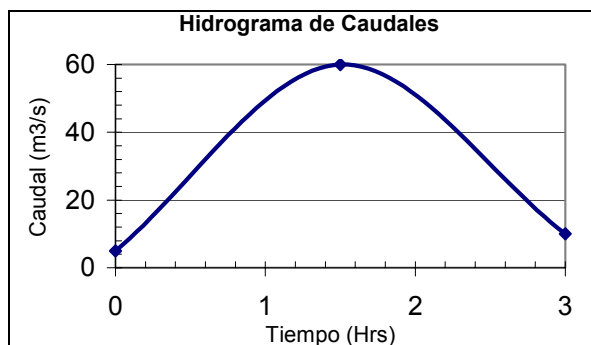


Figura 5.- Hidrograma de caudales (condición de contorno aguas arriba) para el caso de flujo no-permanente aguas arriba de una presa cerrada (Caso 5).

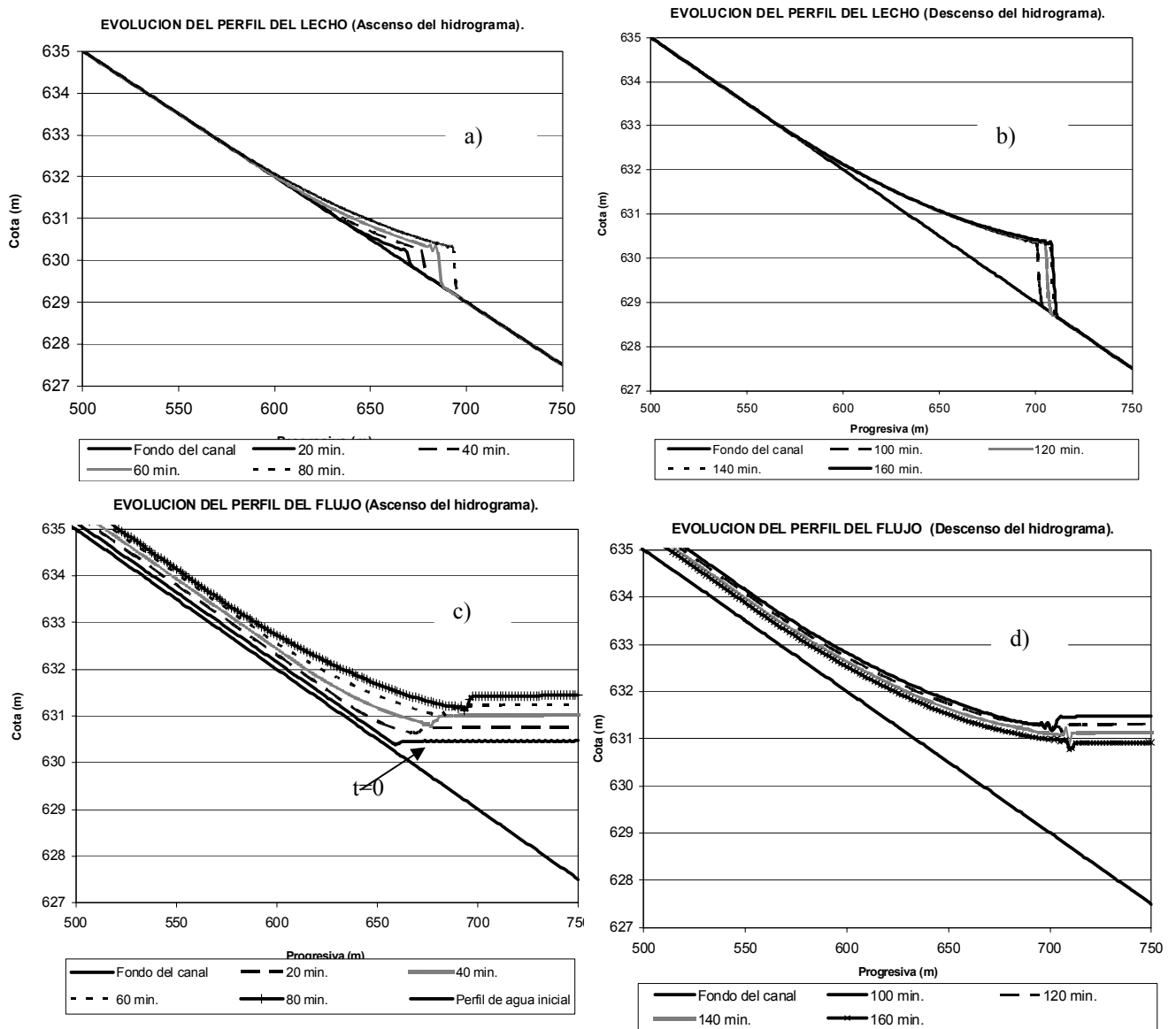
En la Figura 6 se muestran los resultados arrojados por el modelo tanto para el flujo como para el sedimento. En  $t = 0$ , la presa cerrada genera un remanso aguas arriba que se traduce en un perfil S1 que finaliza donde se forma el resalto hidráulico en las cercanías de la progresiva 650 (Figura 6c). La agradación comienza con la formación de una pequeña onda de sedimentos (delta) donde se ubica el resalto hidráulico, porque es allí donde comienza a aumentar la profundidad y a reducirse la capacidad de transporte. A medida que transcurre el tiempo y el caudal aumenta, la pequeña onda se transforma en un delta de sedimentos que crece en altura y viaja hacia aguas abajo, modificando en su avance la pendiente del lecho. El perfil de la superficie libre se va adaptando a las nuevas cotas del lecho y a la nueva pendiente que adopta progresivamente el canal, observándose pequeñas inestabilidades numéricas en zonas cercanas al frente del delta. El resalto viaja también hacia aguas abajo y los remansos se incrementan generando adicionalmente una onda regresiva de sedimentos que incrementa progresivamente las cotas del lecho en su avance aguas arriba (Figura 6a y 6c). Luego, cuando el caudal comienza a descender (Figura 6b y 6d), el avance del delta se hace más lento debido a que las profundidades en el contorno aguas abajo cambian muy poco. Finalizada la creciente, en el tiempo  $t = 160$  min, el delta no ha alcanzado a llegar hasta la presa quedando a unos 40 m del pié de la misma.

#### *Caso 6: Agradación aguas arriba de una presa ranurada en flujo no-permanente*

En este caso se desea investigar el proceso de agradación aguas arriba de una presa abierta del tipo ranurada, sometida al paso de una creciente. Los datos de canal son los mismos que en el caso anterior. La presa tiene una ranura de 4 m de ancho y se supone un coeficiente local de pérdida de energía igual a 0,1. El hidrograma de caudales a transitar por el sistema se describe en la Figura 7. Se usa la fórmula de Engelund-Hansen (ecuación para calcular el arrastre de sedimentos).

Los resultados se presentan en la Figura 8. Al igual que en la presa cerrada, la presa ranurada genera un remanso aguas arriba que induce a la formación de un resalto hidráulico. En este caso, el remanso es producido por la contracción del flujo y las pérdidas de energía que se producen en la ranura. El flujo incrementa su energía específica para pasar con mínima energía a través de la ranura donde se ha supuesto que se verifica el flujo crítico (ecuación 18). El proceso de sedimentación se inicia en forma muy similar al caso de la presa cerrada, es decir, se genera un delta de sedimentos a partir del sitio donde se ubica el resalto. Sin embargo, al incrementarse el caudal, la profundidad en el extremo aguas abajo también aumenta para poder pasar por la ranura con energía mínima ocasionando que la onda del flujo se desplace hacia aguas arriba (Figura 8a). Esto hace que el delta crezca solo verticalmente, sin avanzar mucho hacia aguas abajo, manteniéndose prácticamente estacionario (Figura 8c). El crecimiento vertical del delta, durante el período de ascenso del hidrograma, va acompañado de una onda regresiva de sedimentos que agrada progresivamente los tramos superiores del canal reduciendo la pendiente del lecho. Cuando el caudal comienza a descender ( $t = 210$  minutos), el frente del delta de sedimentos comienza a desplazarse hacia aguas abajo hasta alcanzar el pié de la presa en  $t = 380$  min (Figura 8b). Sin embargo, la presa no se sedimenta totalmente, ya que el fluido pasa por la ranura con profundidad crítica, y por lo tanto, hay un aumento de velocidad que permite el arrastre de los sedimentos que se aproximan a la presa. El avance del delta en la etapa de descenso del caudal, va acompañada de un proceso erosivo de los sedimentos en el tope del delta, en un tramo de unos 30 m aproximadamente aguas arriba de la presa (Figura 8b). La pendiente final de los depósitos en el tope del delta es de 1,57 %. Oscilaciones numéricas se observaron en la superficie del flujo

en las cercanías del delta (Figura 8a y 8b), las cuales sin embargo no parecen afectar los perfiles de agradación del lecho.

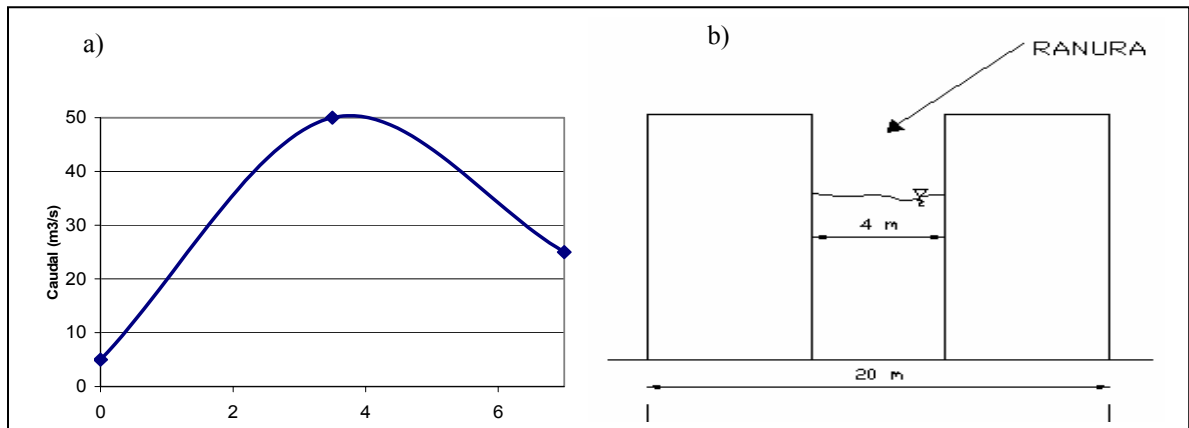


**Figura 6.-** Evolución espacial y temporal de los perfiles del lecho y de la superficie del agua para el caso de agradación aguas arriba de una presa cerrada sujeta al paso de una creciente (Caso 5).

## COMPARACIÓN CON RESULTADOS DE LABORATORIO

El modelo numérico se compara con resultados de experiencias realizadas en el laboratorio. El ensayo experimental se realiza en un canal de 12 m de largo, 0,30 m de ancho y 0,30 m de altura, de pendiente variable y sección rectangular, en donde se coloca una presa cerrada de 0,15 m de altura en el extremo aguas abajo. Las paredes son de madera y vidrio, y en el fondo se ha fijado un material gravoso de 1,7 cm de tamaño medio. El caudal de agua es recirculado y el sedimento (arena fina de  $D_{50} = 0,75$  mm) se alimenta a una tasa constante con una tolva

ubicada en el extremo aguas arriba. Los perfiles del agua y del fondo se monitorean con una cámara de video y un sistema de adquisición de datos.



**Figura 7.-** a) Hidrograma de caudales para el caso de flujo no-permanente aguas arriba de una presa abierta ranurada (Caso 5); b) Sección transversal de presa ranurada.

El ensayo se efectúa para un caudal constante de 2,9 lt/s y un aporte sólido constante de 12,6 gr/s, en un canal de pendiente fuerte igual a 7,5%. La condición inicial se establece con un flujo de agua sin sedimentos, hasta alcanzar rápidamente el estado permanente, con un resalto hidráulico muy suave (ondulado) en el sitio donde el perfil S1 intercepta al perfil en régimen uniforme. Se miden los niveles del agua y se verifica la presencia de un régimen ligeramente supercrítico (Froude = 1,28) en el flujo de aproximación a la presa. La condición de contorno aguas abajo para el modelo numérico consiste en los niveles medidos de la superficie libre en el sitio de presa.

El coeficiente de fricción del lecho de grava se calcula a partir de las mediciones de profundidad en el tramo donde el régimen es uniforme. A partir de la fórmula de Manning el coeficiente resulta ser  $n = 0,0325$ . Tomando en cuenta que el material arenoso suministrado aguas arriba del canal era diferente al material (grava) que fue colocado como fondo del canal, se hizo necesario estimar el coeficiente de fricción para las secciones en donde ocurra la sedimentación de la arena. Suponiendo válida la fórmula de Strickler, la  $n$  de Manning para el lecho arenoso se calcula con la relación:

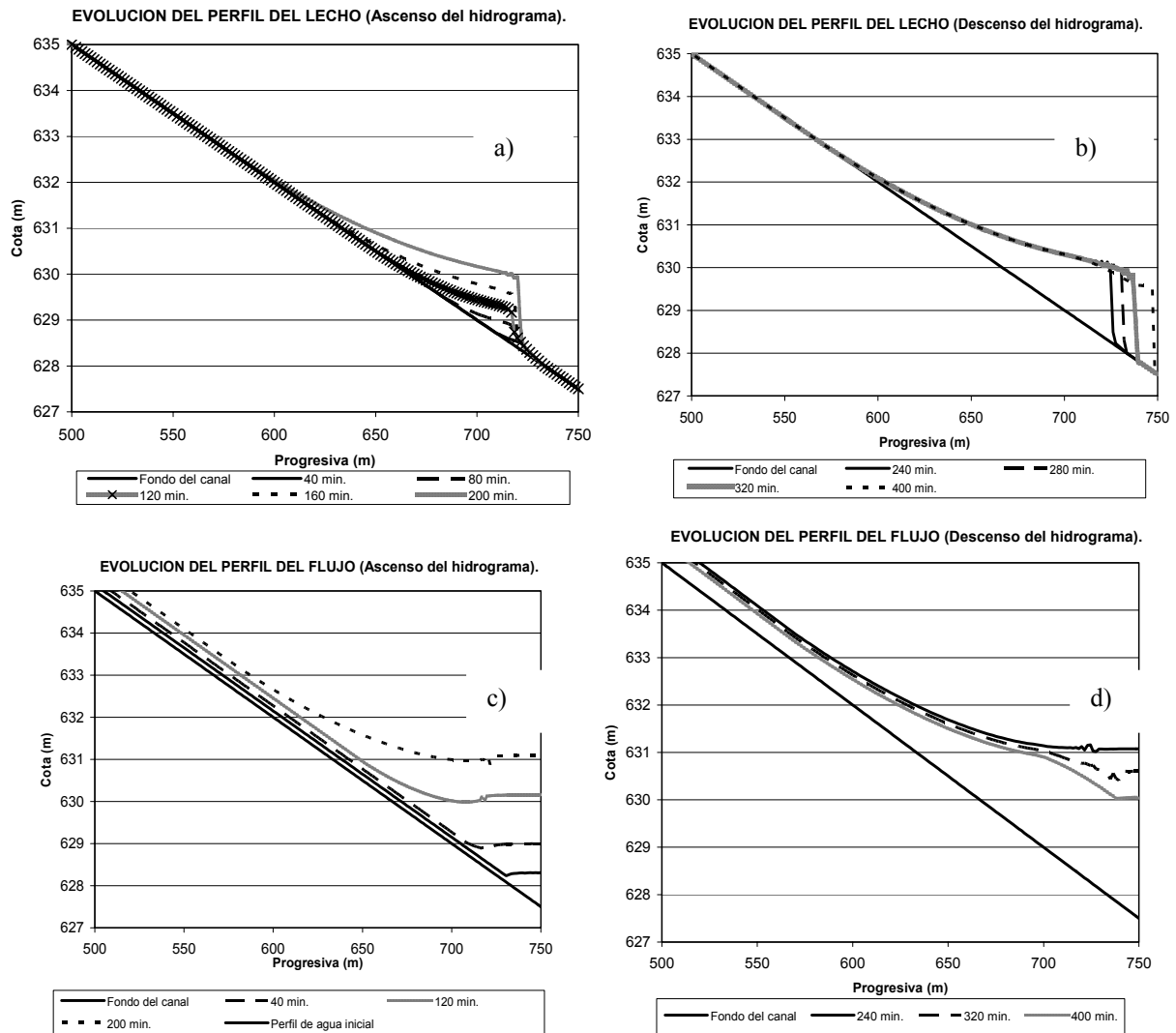
$$n_4 = n_1/n_2 * n_3 \quad (22)$$

en donde  $n_4$  es el coeficiente para el lecho arenoso;  $n_1$  es el coeficiente medido para la grava;  $n_2$  es el coeficiente calculado para la grava con la fórmula de Strickler; y  $n_3$  es el coeficiente para la arena calculado por Strickler. El valor obtenido para la arena es de  $n_4 = 0,0196$ .

En el tiempo  $t = 0$ , se deja entrar el sedimento en una sección ubicada a 8 m aguas arriba de la presa.

La capacidad de transporte del canal es superior al aporte de sedimentos aguas arriba, por lo que el sedimento viaja como carga suspendida y de fondo hasta que se encuentra con el remanso de la presa, donde se inicia la deposición del sedimento. Los intervalos de cálculo  $\Delta x$  y  $\Delta t$  fueron fijados en 0,05 m y 0,02 sg, respectivamente. Se utilizaron tres ecuaciones

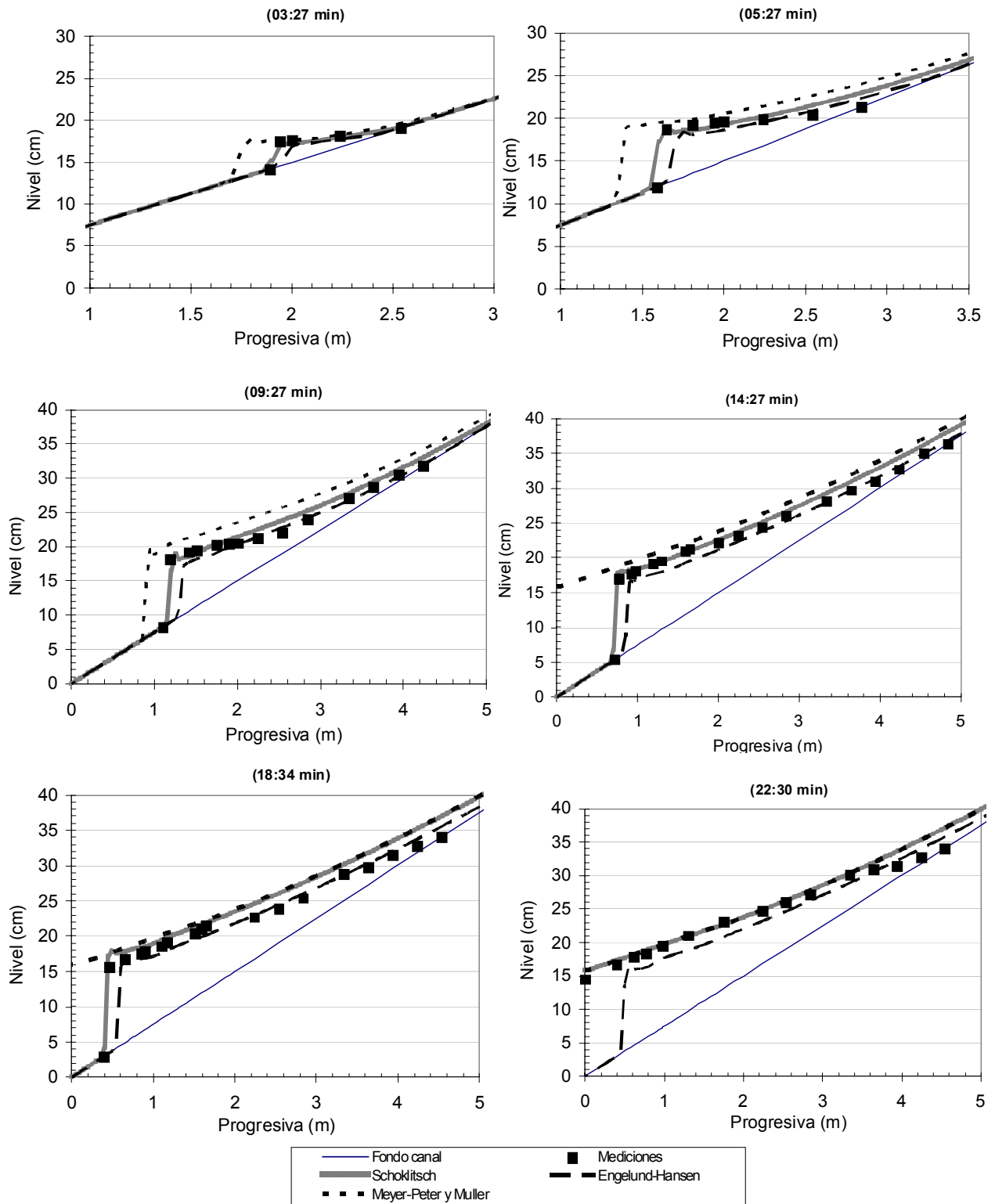
de transporte para comparar con los resultados experimentales: las ecuaciones de Schoklitsch, Engelund-Hansen y Meyer-Peter y Muller.



**Figura 8.-** Evolución espacial y temporal de los perfiles del lecho y de la superficie del agua para el caso de agradación aguas arriba de una presa abierta ranurada sujeta al paso de una creciente (Caso 6).

Los resultados se presentan en la Figura 9 donde se comparan los perfiles medidos y calculados del lecho en diferentes tiempos. La ecuación de transporte de Schoklitsch es la que mejor se ajusta a los resultados experimentales, reproduciendo con bastante precisión el crecimiento y avance del delta de sedimentos. La ecuación de Engelund-Hansen produce un avance del delta de sedimentos más lento en relación al experimental mientras que la de Meyer-Peter y Muller sobrestima la velocidad de propagación. Las mayores diferencias entre el perfil calculado por Schoklitsch y el perfil medido se observan en la cola de delta, debido principalmente a los cambios de rugosidad que se presentan en el fondo por la diferencia de los materiales de arrastre y de fondo, que el modelo numérico no puede representar con exactitud





**Figura 9.-** Comparación entre perfiles del lecho medidos y calculados para diferentes fórmulas de transporte de sedimentos.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se ha desarrollado un modelo numérico que permite evaluar y predecir el comportamiento hidráulico y morfológico de canales de pendiente fuerte y su interacción con presas abiertas o cerradas controladoras de sedimentos. El modelo se basa en el uso de las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el flujo unidimensional, no permanente, gradualmente variado en canales abiertos (ecuaciones de Saint Venant), en conjunto con la ecuación de continuidad del sedimento y con las ecuaciones para evaluar la fricción y el arrastre de sedimentos en ríos de montaña. El modelo utiliza el esquema de diferencias finitas de MacCormack-TVD para resolver las ecuaciones diferenciales y fue desarrollado en Fortran 90 con una interfase en Visual Basic 6.0 para facilitar la entrada de datos al modelo.

Las experiencias numéricas realizadas muestran que el modelo permite calcular transiciones del flujo subcrítico a supercrítico y viceversa, ubicando automáticamente la localización del resalto hidráulico. El modelo ha sido aplicado también para generar las condiciones finales de equilibrio morfodinámico en cauces sujetos a procesos de agradación y degradación del lecho con cambios en el régimen de flujo, y los resultados han sido validados mediante comparación con soluciones analíticas.

Las simulaciones numéricas efectuadas en dos casos hipotéticos para analizar la agradación que se produce aguas arriba de una presa cerrada y de una presa abierta, durante una creciente, muestran que el modelo reproduce razonablemente los procesos de formación, crecimiento y avance del delta de sedimentos, y su interacción con el resalto hidráulico y con las condiciones de contorno impuestas por las estructuras de control (presas). Los desplazamientos del resalto, hacia aguas arriba o abajo dependiendo de las variaciones del caudal, son simulados adecuadamente por el modelo, presentándose en algunos casos pequeñas oscilaciones numéricas en la superficie del agua, en las inmediaciones del frente del delta. A medida que avanza el proceso de sedimentación, el resalto hidráulico se va atenuando y el flujo aguas arriba del frente del delta se va haciendo menos supercrítico o incluso cambia de régimen, debido al descenso de la pendiente original de lecho.

Se realizaron ensayos experimentales en un canal de laboratorio para monitorear el desplazamiento de un delta de sedimentos generado aguas arriba de una presa cerrada. Los resultados numéricos se comparan satisfactoriamente con las mediciones de laboratorio. La comparación con los ensayos experimentales refuerza la importancia de seleccionar adecuadamente la fórmula de transporte de sedimentos para evaluar la respuesta del cauce fluvial a la construcción de obras hidráulicas. La ecuación de Schoklitsch es la que mejor se ajusta a los resultados experimentales, reproduciendo con bastante precisión la evolución del delta de sedimentos, mientras que la ecuación de Engelund-Hansen y la de Meyer-Peter y Muller subestiman y sobrestiman, respectivamente, su velocidad de propagación.

El modelo puede ser usado para evaluar el funcionamiento de presas existentes, abiertas o cerradas, de retención de sedimentos, así como para apoyar en el diseño de futuras presas. Una segunda fase de esta investigación debe abocarse al desarrollo de un modelo bidimensional para simular la distribución no uniforme de los depósitos sedimentarios al pie de las presas abiertas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

**Aguirre Pe, J. y Fuentes, R.** (1990), “Resistance to Flow in Steep Rough Streams”, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 116(11), November, 1374-1387.

**Aguirre, J.** (1974), “Hidráulica de Canales”, Centro Interamericano de Desarrollo e Investigación Ambiental y Territorial CIDIAT, Universidad de los Andes, Mérida.

**Bhallamudi, S. y Chaudhry, M.** (1991), “Numerical modeling of aggradation and degradation in alluvial channels”, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 117, No. 9: 1145-1164.

**Busnelli, M., Stelling, G., y Larcher, M.** (2001), “Numerical morphological modeling of Open-check dams”, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 127, No. 2: 105-114.

**Garcia, R. y Kahawita, R. A.** (1986), Numerical Solution of the St. Venant Equations with MacCormack Finite Difference Scheme, International Journal Numerical Methods in Fluids (6): 259-274.

**García, P., Alcrudo, F. y Savirón, J.** (1992), “1-D Open-Channel Flow Simulation Using TVD-McCormack Écheme”, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 118, No. 10: 1359-1372.

**Kusakabe, S., Michiue, M., Fujita, M. y Hinokidani, O.** (1995), Bed variation model in steep channels with transition of flow using MacCormack scheme, Sixth International Symposium on River Sedimentation, pp. 649-658.

**Papanicolaou, A.N., Bdour, A., y Wicklein, E.** (2004), “One-dimensional hydrodynamic sediment transport model applicable to steep mountain streams”, Journal of Hydraulic Research, Vol. 42, N° 4.

## ANEXO I: Formulación del esquema TVD

El esquema TVD realiza una nueva corrección a los valores obtenidos a través del esquema explícito de segundo orden de MacCormack. Una vez aplicados los pasos predictor y corrector a todos los nodos de la malla se aplica el tercer paso TVD de acuerdo a la siguiente formulación:

$$UB_i^{k+1} = \frac{\frac{Q_i^{k+1}}{\sqrt{A_i^{k+1}}} + \frac{Q_{i-1}^{k+1}}{\sqrt{A_{i-1}^{k+1}}}}{\sqrt{A_i^{k+1}} + \sqrt{A_{i-1}^{k+1}}} \quad (1)$$

Donde  $A$  representa el Área de flujo.

$$CB_i^{k+1} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{g \frac{A_i^{k+1}}{Atope_i^{k+1}}} + \sqrt{g \frac{A_{i-1}^{k+1}}{Atope_{i-1}^{k+1}}} \right) \quad (2)$$

Donde  $Atope$  representa el Ancho tope de la sección de flujo.

$$AB1_i^{k+1} = UB_i^{k+1} + CB_i^{k+1} \quad (3)$$

$$AB1_i^{k+1} = UB_i^{k+1} - CB_i^{k+1} \quad (4)$$

$$\alpha 1_i^{k+1} = \frac{0.5}{CB_i^{k+1}} (Q_i^{k+1} - Q_{i-1}^{k+1}) + (-UB_i^{k+1} + CB_i^{k+1}) (A_i^{k+1} - A_{i-1}^{k+1}) \quad (5)$$

$$\alpha 2_i^{k+1} = \frac{-0.5}{CB_i^{k+1}} (Q_i^{k+1} - Q_{i-1}^{k+1}) + (-UB_i^{k+1} - CB_i^{k+1}) (A_i^{k+1} - A_{i-1}^{k+1}) \quad (6)$$

$$XI1_i^{k+1} = \begin{cases} |AB1_i^{k+1}| \Rightarrow AB1_i^{k+1} \geq 0.1 \\ 0.1 \Rightarrow AB1_i^{k+1} < 0.1 \end{cases} \quad (7)$$

$$XI2_i^{k+1} = \begin{cases} |AB2_i^{k+1}| \Rightarrow AB2_i^{k+1} \geq 0.1 \\ 0.1 \Rightarrow AB2_i^{k+1} < 0.1 \end{cases} \quad (8)$$

$$R1_i^{k+1} = \begin{cases} \frac{\alpha 1_i^{k+1}}{\alpha 1_i^{k+1} - \text{sign}(1, AB1_i^{k+1})} \Rightarrow \alpha 1_i^{k+1} \neq 0 \\ 0 \Rightarrow \alpha 1_i^{k+1} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\phi 1_i^{k+1} = \begin{cases} \frac{R1_i^{k+1} + (R1_i^{k+1})^2}{1 + (R1_i^{k+1})^2} \Rightarrow \alpha 1_i^{k+1} \neq 0 \\ 0 \Rightarrow \alpha 1_i^{k+1} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$R2_i^{k+1} = \begin{cases} \frac{\alpha 2_i^{k+1}}{\alpha 2_i^{k+1} - \text{sign}(1, AB2_i^{k+1})} \Rightarrow \alpha 2_i^{k+1} \neq 0 \\ 0 \Rightarrow \alpha 2_i^{k+1} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\phi 2_i^{k+1} = \begin{cases} \frac{R2_i^{k+1} + (R2_i^{k+1})^2}{1 + (R2_i^{k+1})^2} \Rightarrow \alpha 2_i^{k+1} \neq 0 \\ 0 \Rightarrow \alpha 2_i^{k+1} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$DC_i^{k+1} = \frac{1}{2} \left[ \left( \alpha 1_i^{k+1} \times XI1_i^{k+1} \times \left( 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |AB1_i^{k+1}| \right) \right) \times (1 - \phi 1_i^{k+1}) + \dots \right. \\ \left. \left( \alpha 2_i^{k+1} \times XI2_i^{k+1} \times \left( 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |AB2_i^{k+1}| \right) \right) \times (1 - \phi 2_i^{k+1}) \right] \quad (13)$$

$$DCM_i^{k+1} = \frac{1}{2} \left[ \left( \alpha 1_i^{k+1} \times XI1_i^{k+1} \times \left( 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |AB1_i^{k+1}| \right) \right) \times (1 - \phi 1_i^{k+1}) \times AB1_i^{k+1} + \dots \right. \\ \left. \left( \alpha 2_i^{k+1} \times XI2_i^{k+1} \times \left( 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |AB2_i^{k+1}| \right) \right) \times (1 - \phi 2_i^{k+1}) \times AB2_i^{k+1} \right] \quad (14)$$

Finalmente,

$$Q_{TVD_i}^{k+1} = Q_i^{k+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (DCM_{i+1}^{k+1} - DCM_i^{k+1}) \quad (15)$$

$$A_{TVD_i}^{k+1} = A_i^{k+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (DC_{i+1}^{k+1} - DC_i^{k+1}) \quad (16)$$