

GENERALIZACIÓN DEL MODELO DE KOVACS-PARKER PARA INCLUIR EFECTOS DE CURVATURA

Angel N. Menéndez^{1,2}, Carlos E. Laciana² y Pablo A. García^{1,2}

¹PHC-Laboratorio de Hidráulica-INA, AU Ezeiza-Cañuelas, Tramo J. Newbery Km 1,620, CP 1804, Ezeiza, Argentina

²LaMM-Facultad de Ingeniería-UBA, Av. Las Heras 2214, CP 1127, Ciudad de Buenos Aires, Argentina

E-mail: angel.menendez@speedy.com.ar - Web: <http://www.fi.uba.ar/laboratorios/lmm>

RESUMEN

Se presenta la generalización del modelo de Kovacs-Parker, de cálculo del transporte de sedimento de fondo, para incluir los efectos de la curvatura del canal. Además, se plantea una formulación más tratable del modelo, que permite una implementación directa del método. Se lo valida mediante su aplicación a casos simples para los cuales se cuenta con datos experimentales. Se concluye que el modelo de Kovacs-Parker constituye una herramienta eficaz y teóricamente bien fundada para calcular el transporte de fondo, recomendándose su utilización para reemplazar a las formulaciones empíricas usualmente empleadas.

ABSTRACT

The generalization of Kovacs-Parker model, for the calculation of the bottom sediment transport, to include the effects of curvature of the channel, is presented. Additionally, a more tractable formulation of the model is posed, which allow a straight implementation of the method. It is validated through its application to simple cases for which experimental data are available. It is concluded that Kovacs-Parker model constitutes an efficient and theoretically well-founded tool to calculate bottom transport. Its use, replacing the usually employed empirical formulations, is recommended.

INTRODUCCIÓN

El problema de calcular el transporte de sedimentos en la dirección lateral, para cauces aluviales, y el consiguiente cambio en la forma de la sección transversal, han recibido alguna atención en la literatura especializada.

Para calcular la batimetría en un canal curvo, Engelund (1976) desarrolló una ecuación relacionando los transportes volumétricos de carga de fondo en sentido lateral y longitudinal, considerando tanto el efecto del movimiento helicoidal debido a la curvatura, como el de la pendiente lateral. Prácticamente al mismo tiempo, y tratando con el mismo problema, Kikkawa et al. (1976) obtuvieron implícitamente una relación similar, que fue más tarde explicitada por Parker (1983). En esta fórmula, el efecto de la pendiente lateral se expresa en una forma más general. Utilizando este tipo de tratamientos, el transporte de fondo en sentido lateral puede calcularse una vez que se conoce el transporte longitudinal, el cual se puede obtener a partir de las fórmulas empíricas clásicas.

Más recientemente, Kovacs & Parker (1994) introdujeron un modelo de transporte de fondo con base física (en lo que sigue, el modelo KP), que trata automáticamente el transporte lateral. La virtud de este tratamiento reside en que el empirismo se introduce recién en el nivel de la parametrización de las fuerzas. Constituye, entonces, la base teórica más apropiada para un modelo de transporte de fondo.

Una de las limitaciones del modelo KP es su complejidad relativa y una formulación un tanto abstracta en el trabajo original (Kovacs & Parker, 1994), lo que ha conducido a su poco uso práctico. Una segunda limitación del modelo KP es que ha sido formulado para un canal recto, es decir, no considera efectos de curvatura.

El presente trabajo tiene dos objetivos. El primero es presentar una formulación más tratable del modelo KP, que permite una implementación directa del método, de modo contribuir a su adopción para cálculos prácticos. El segundo objetivo es generalizar el modelo para incluir efectos de curvatura.

GENERALIZACIÓN DEL MODELO KP

Velocidad de la partícula de sedimento

El modelo KP plantea en base al balance de las fuerzas que actúan sobre una partícula de sedimento: la fuerza resistiva dinámica de Coulomb (que representa la pérdida de cantidad de movimiento debido a las colisiones), la componente del peso sumergido de la partícula tangencial al plano del lecho, y la fuerza de arrastre debido al fluido en movimiento. De esta manera se llega a la siguiente ecuación (Kovacs & Parker 1994):

$$|\vec{u}_\Delta^*| \vec{u}_\Delta^* = a \tau_{c0}^* \left(\vec{k}_n |\hat{t}_{v_p}| - \frac{\vec{k}_t}{\mu_c} \right) \quad (1)$$

donde $\vec{u}_\Delta = \vec{u}_b - \vec{v}_p$, siendo \vec{u}_b la velocidad del fluido y \vec{v}_p la de la partícula, $a \equiv (\vec{u}_b / U_*)^2$, con U_* la velocidad de corte, τ_{c0}^* es la tensión de corte adimensional (parámetro de Shields) para iniciación del movimiento sobre un fondo plano, $\hat{t}_{v_p} \equiv \vec{v}_p / |\vec{v}_p|$ el versor en la dirección de la velocidad de la partícula, μ_c el factor de fricción dinámica de Coulomb, y \vec{k}_n y \vec{k}_t las componentes del versor vertical, dirigido hacia abajo, en las direcciones normal y transversal al lecho.

La velocidad del fluido puede expresarse como

$$\vec{u}_b = \varepsilon U \hat{s} + u_r \sqrt{1 + \cos^2 \alpha \tan^2 \omega} \hat{p}' \quad (2)$$

donde \hat{s} es el versor en la dirección longitudinal de movimiento, \hat{p}' el versor sobre el plano tangencial al fondo y normal a \hat{s} , U la velocidad longitudinal del flujo, integrada en la vertical, ε la relación entre la componente longitudinal de la velocidad en el fondo y la velocidad media vertical U , u_r la componente lateral de la velocidad en el fondo (asociada a la corriente secundaria), α el ángulo correspondiente a la pendiente longitudinal del canal y ω el ángulo correspondiente a la pendiente lateral. En el modelo KP original se considera nula la componente lateral.

Para resolver (1), se propone descomponerla en componentes, multiplicándola alternativamente por los versores \hat{s} y \hat{p}' , con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} |\vec{u}_{\Delta}^*| (u_{bs}^* - v_p^* \cos \psi) - a\tau_{C0}^* \left(|\cos \beta| \cos \psi - \frac{\sin \alpha}{\mu_C} \right) &= 0 \\ |\vec{u}_{\Delta}^*| (u_{bp}^* - v_p^* \sin \psi) - a\tau_{C0}^* \left(|\cos \beta| \sin \psi - \frac{1}{\mu_C} \frac{\sin \omega \cos^2 \alpha}{\sqrt{\sin^2 \omega \cos^2 \alpha + \cos^2 \omega}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

donde

$$|\vec{u}_{\Delta}^*| = \left(u_{bs}^{*2} + u_{bp}^{*2} + v_p^{*2} - 2u_b^* v_p^* \cos \psi - 2u_{bp}^* v_p^* \sin \psi \right)^{1/2}, \quad (4)$$

$v_p = |\vec{v}_p|$, u_{bs} y u_{bp} son las componentes de \vec{u}_b en las direcciones \hat{s} y \hat{p}' , respectivamente, explicitadas en (2), ψ es el ángulo entre el vector velocidad y la dirección \hat{s} , y el asterisco indica velocidades adimensionales, con la escala $\sigma \equiv \sqrt{Rgd}$, siendo R la densidad relativa del grano, cuyo diámetro medio es d . El sistema (3) se ha resuelto por medio del método de Newton-Raphson, para obtener las incógnitas v_p^* y ψ .

Tasa de transporte de fondo

La tasa volumétrica de sedimento transportado, adimensionalizada con la escala $d\sigma$ y vectorizada, se calcula como (Kovacs & Parker 1994):

$$\vec{q}_b^* = \xi^* \vec{v}_p^* \quad (5)$$

donde ξ^* es el volumen adimensional de partículas que participa en el transporte de fondo. Para obtener este volumen, se efectúa un balance de cantidad de movimiento en la capa de fondo. La generalización del modelo KP para incluir los efectos de la curvatura conduce a

$$\xi^* = \frac{\tau_b^* - \tau_C^*}{\left(\mu_C |\vec{k}_n| \hat{t}_{v_p} - \vec{k}_t \right) \cdot \hat{s}'} \quad (6)$$

donde $\hat{s}' \equiv \cos \alpha_s \hat{s} + \sin \alpha_s \hat{p}'$, $\tan \alpha_s = u_{bp} / u_{bs}$,

$$\tau_b^* = \frac{\varepsilon^2 U^2}{aRgd \cos \alpha_s} \quad (7)$$

es la tensión de corte en el fondo, y τ_C^* es la tensión de corte adimensional crítica para inicio del movimiento. Esta última se obtiene especializando (1) para condiciones críticas; elevando la expresión resultante al cuadrado se llega a

$$\left(\frac{\tau_C^*}{\tau_{C0}^*} \right)^2 + \frac{2}{\mu_C} \frac{\vec{s}_p \cdot \vec{k}_t}{s_p^2} \frac{\tau_C^*}{\tau_{C0}^*} + \frac{1}{\mu_C^2} \frac{k_t^2}{s_p^2} - \cos^2 \beta = 0 \quad (8)$$

donde $\vec{s}_p \equiv \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_s} (\hat{s} + \tan \alpha_s \hat{p}')$, cuya solución físicamente significativa es

$$\frac{\tau_C^*}{\tau_{C0}^*} = -\frac{1}{\mu_C} \frac{\vec{s}_p \cdot \vec{k}_t}{s_p^2} + \sqrt{\cos^2 \beta + \frac{1}{\mu_C^2} \left[\left(\frac{\vec{s}_p \cdot \vec{k}_t}{s_p^2} \right)^2 - \frac{k_t^2}{s_p^2} \right]} \quad (9)$$

En el modelo KP original se tiene que $\alpha_s = 0$, con lo cual $\vec{s}_p = \hat{s}$.

MODELO HIDRODINÁMICO

Para determinar las componentes de la velocidad de flujo necesarias para el cálculo de la tasa de transporte de fondo, es necesario utilizar un modelo hidrodinámico.

Para un problema de flujo en canales, pueden distinguirse localmente tres coordenadas espaciales bien definidas: una a lo largo de la dirección de flujo (longitudinal), una segunda en el plano horizontal y a través de la dirección de flujo (lateral), y una tercera en la dirección vertical (suponiendo una pendiente suave). Se considerará que, como es usual, las escalas características en esas tres direcciones son muy distintas entre sí, lo cual permite algunas simplificaciones.

En primer lugar, se supondrá que la escala longitudinal de interés (la escala del observador) es mucho mayor que las dimensiones transversales de la sección:

$$L_{ox} \gg \hat{B}, \hat{h} \quad (10)$$

donde \hat{B} es una escala para el ancho del canal, \hat{h} una escala para la profundidad de agua, y L_{ox} la escala espacial longitudinal del observador, que puede calcularse como $L_{ox} \equiv \hat{U}\hat{T}$, siendo \hat{U} una escala para la velocidad longitudinal de flujo y \hat{T} la escala temporal del observador. La condición (10) significa que el problema puede ser tratado por medio de una aproximación unidimensional (Menéndez 2003), es decir, que la variación longitudinal de la velocidad media en la sección transversal puede ser calculada independientemente de la variación transversal de la velocidad de flujo, utilizando un Modelo Longitudinal 1D, tal como las conocidas Ecuaciones de Saint Venant (Jain 2001).

En segundo lugar, la sección transversal será considerada poco profunda:

$$\hat{B} \gg \hat{h} \quad (11)$$

Como consecuencia de la condición (11), la distribución lateral de la velocidad de flujo puede ser determinada independientemente de la distribución vertical.

En tercer lugar, se supondrá que la escala espacial lateral del observador L_{oy} , que se calcula como $L_{oy} \equiv \sqrt{\hat{\epsilon}_y \hat{T}}$, siendo $\hat{\epsilon}_y$ una escala para la difusividad lateral, es a lo sumo del mismo orden que la dimensión lateral de la sección transversal, es decir

$$L_{oy} \lesssim \hat{B} \quad (12)$$

Como consecuencia de (12), es pertinente calcular la distribución lateral de la velocidad longitudinal de flujo, que puede ser obtenida de un Modelo Lateral 1D, tal como el Método de la Distribución Lateral (LDM) propuesto por Wark et al.(1990):

$$ghI_x - \frac{B_g f}{8} U^2 + h \frac{d}{dy} \left[\varepsilon_y \frac{dU}{dy} \right] = 0 \quad (13)$$

donde y es la coordenada lateral, h la profundidad local de flujo, I_x la pendiente longitudinal del flujo (obtenida del Modelo Longitudinal 1D), f el factor de fricción de Darcy-Weisbach, B_g un factor geométrico que tiene en cuenta la inclinación del fondo:

$$B_g = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \omega}, \quad (14)$$

y ε_y la viscosidad lateral de torbellino, que usualmente se parametriza como

$$\varepsilon_y = \chi U_* h \quad (15)$$

donde χ es el coeficiente adimensional de viscosidad lateral de torbellino, y $U_* = \sqrt{\tau_b}$ la velocidad de corte, siendo τ_b la tensión cinemática de corte en el fondo, la cual se parametriza como (Wark 1990)

$$\tau_b = \frac{1}{8} f B_g U^2 \quad (16)$$

Como condiciones de contorno para (13) puede imponerse la condición de libre deslizamiento en ambas márgenes:

$$\left. \frac{dU}{dy} \right|_{\text{márgenes}} = 0 \quad (17)$$

que físicamente significa que no se resuelven las capas límites adyacentes a las márgenes.

La ecuación diferencial ordinaria no lineal (13) se ha discretizado utilizando un esquema de diferencias finitas centrado. El sistema algebraico no lineal resultante se ha resuelto por el método de Newton-Raphson.

Como consecuencia de la curvatura, adicionalmente a la velocidad longitudinal se desarrollan componentes transversales que constituyen la corriente secundaria. En particular, la componente lateral de la velocidad en el fondo, u_r , es de relevancia para el transporte de sedimentos, como se ha visto más arriba. Esta se ha determinado en base al modelo paramétrico para el perfil vertical de la velocidad de Kikkawa et al. (1976), que supone que el radio de curvatura del canal es mucho mayor que su ancho. La expresión es la siguiente:

$$u_r = \frac{U^2}{\bar{U}} \frac{h}{r} \frac{1}{\kappa} \left(4.167 - 2.640 \frac{1}{\kappa} \frac{\bar{U}_*}{\bar{U}} \right) \quad (18)$$

donde \bar{U} y \bar{U}_* son las velocidades longitudinales de flujo y de corte, respectivamente, promediadas sobre la sección transversal:

$$\bar{U} = \frac{1}{B} \int_0^B U dy, \quad \bar{U}_* = \frac{1}{B} \int_0^B U_* dy, \quad (19)$$

siendo B el ancho del canal, r es el radio de curvatura, y κ la constante de von Karman (≈ 0.4).

En las márgenes se cumple la condición de impenetrabilidad:

$$u_r \Big|_{\text{márgenes}} = 0 \quad (20)$$

La transición entre el valor provisto por el modelo paramétrico, ecuación (18), y el valor marginal, ecuación (20), se ha efectuado por medio de una función moduladora, ó ‘máscara’, $M(y)$, de la siguiente forma:

$$M(y) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\delta - y}{y} \right)^{1/2} & \text{si } 0 \leq y \leq \delta \\ 1 & \text{si } \delta \leq y \leq B - \delta \\ 1 - \left(\frac{\delta + y - B}{\delta} \right)^{1/2} & \text{si } B - \delta \leq y \leq B \end{cases} \quad (21)$$

donde δ es el espesor de la capa límite en la margen. Entonces, se tiene que

$$u_r = M(y) u_r \Big|_{\text{modelo}} \quad (22)$$

MODELO MORFOLÓGICO

La evolución morfológica del fondo del canal se determina resolviendo la ecuación de Exner, que expresa la conservación de la masa del sedimento (Raudkivi 1990):

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} (r q_{by}) + \frac{\partial q_{bx}}{\partial x} \right] = 0 \quad (23)$$

donde z_0 es la elevación del fondo, t la coordenada temporal, λ la porosidad del sedimento de fondo, q_{bx} y q_{by} las componentes longitudinal y lateral, respectivamente, del transporte volumétrico de sedimento por unidad de ancho, obtenidas de (5).

Para el caso particular de condiciones longitudinales cuasi-uniformes, es decir, $\partial/\partial x \approx 0$, (23) puede ser discretizada con el siguiente esquema explícito centrado de diferencias finitas:

$$\frac{[z_0]_j^{n+1} - (1-\theta)[z_0]_j^n + \theta([z_0]_{j-1}^n + [z_0]_{j+1}^n)}{\Delta t} + \frac{[r]_{j+1/2}^n ([q_{by}]_{j+1}^n - [q_{by}]_j^n) - [r]_{j-1/2}^n ([q_{by}]_j^n - [q_{by}]_{j-1}^n)}{(1-\lambda)[r]_j^n \Delta y^2} = 0 \quad (24)$$

donde n es el índice de nivel de tiempo, j el índice de nodo espacial, y $0 \leq \theta \leq 1$ un factor de peso. Incrementando θ desde 0 a 1, se produce un incremento de la difusión numérica.

La erosión de la margen se tiene en cuenta a través del algoritmo siguiente, que supone que el nivel de agua es igual al nivel de las márgenes (condición de cauce lleno):

- Luego de cada paso de cálculo, se determina la pendiente de la margen.
- Si la pendiente de la margen es menor que la pendiente crítica, dada por la condición $\tan \omega_c = \mu_c$, no se toma ninguna acción.
- Por el contrario, si la pendiente de la margen es igual o superior al valor crítico, se considera un proceso de deslizamiento local: la elevación del nodo de la margen se disminuye hasta que la pendiente de la margen se haga crítica, y se agrega un nuevo nodo al dominio espacial de cálculo (hacia el exterior del canal), para representar la nueva ubicación de la margen. Para tener en cuenta la conservación de la masa, el volumen deslizado es luego distribuido entre los nodos adyacentes a la margen.

VALIDACIÓN

Para validar el modelo se efectuaron dos pruebas diferentes, para las cuales existen resultados experimentales y de cálculo. En primer lugar, se consideró un canal recto con márgenes erosivas, para verificar que la metodología propuesta puede tratar con éxito el problema original de Kovacs & Parker. En segundo lugar, se tomó un canal curvo de márgenes fijas, de modo de validar el tratamiento de los efectos de la corriente secundaria. Para ambos problemas, las condiciones son de uniformidad longitudinal, es decir $\partial / \partial x = 0$.

Canal recto

El canal recto tiene una forma trapezoidal, con una base de 0,22 m, un ancho superficial de 0,438 m, una profundidad de 61 mm, una pendiente de 0.00215, y fondo y márgenes de arena con diámetro medio 1,3 mm. Para los parámetros del modelo se tomaron los mismos valores que Kovacs & Parker (1994): $a^{1/2} = 11.9$, $\tau_{c0}^* = 0,035$, $\mu_c = 0,84$, $\lambda = 0,35$, $\varepsilon_y / U_* h = 0,13$.

El dominio lateral inicial se discretizó en 100 intervalos. El factor de peso θ se tomó nulo, correspondiendo a las condiciones menos difusivas. El paso temporal fue de $\Delta t = 1$ seg, que produce cambios de elevación del lecho no mayores a 1 mm por paso de tiempo, proveyendo entonces suficiente precisión.

En la figura 1 se presenta la comparación, para la evolución de la (mitad de la) sección transversal normalizada, entre los resultados numéricos presentes y los obtenidos por Kovacs

& Parker (1994), identificados como K&P en la figura. Estos autores utilizaron un modelo hidrodinámico transversal 2D, es decir, no desacoplaron las direcciones vertical y lateral de movimiento, y tuvieron en cuenta la componente vertical de la velocidad, lo cual conduce a un procedimiento de cálculo más complejo. Adicionalmente, ellos extrapolaron la validez del modelo de transporte de fondo (modelo KP) más allá de la superficie libre, para tener en cuenta la provisión de sedimentos desde la margen seca. El acuerdo muy satisfactorio entre ambas soluciones, observado en la figura 1, indica que el presente tratamiento más simple, pero físicamente fundado, es lo suficientemente aproximado para capturar todos los fenómenos relevantes.

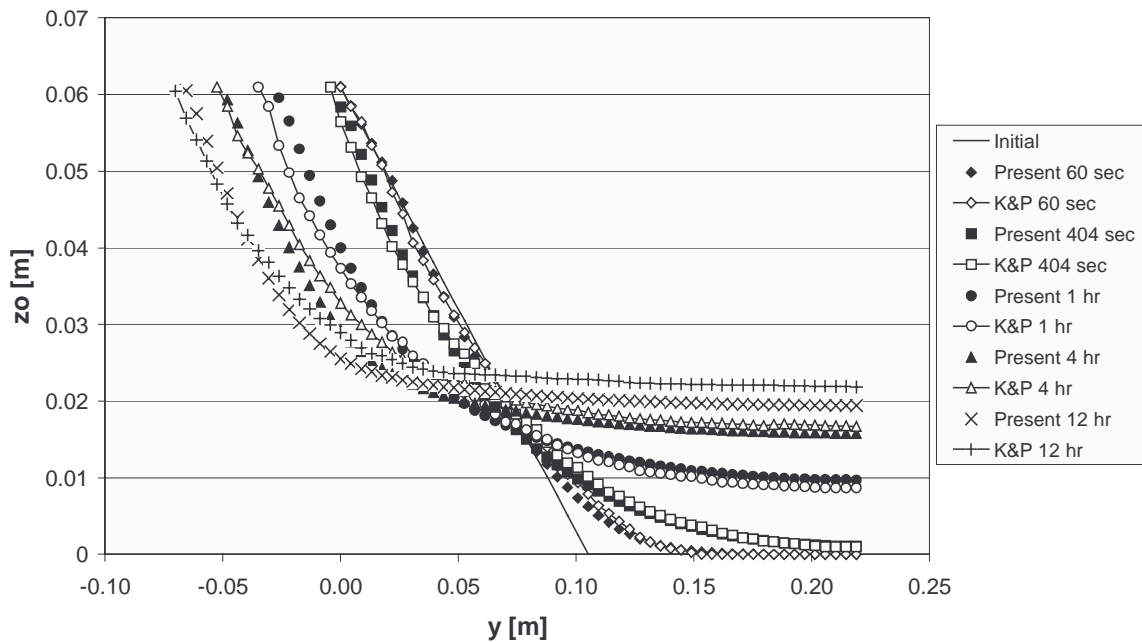


Figura 1.- Comparación entre resultados del modelo K&P (Kovacs & Parker 1994) y el presente para la evolución de la sección transversal de un canal recto.

La figura 2 muestra el perfil (izquierdo) normalizado del canal (B_o es el ancho de solera inicial y h_o la profundidad inicial en el centro del canal) de acuerdo a ambos modelos y los resultados experimentales de Ikeda. Se observa que el modelo K&P captura con mayor precisión la pendiente de la margen, lo cual seguramente se debe al uso de un modelo hidrodinámico más elaborado. Las desviaciones de los datos experimentales observadas en el fondo se deben a la presencia de formas de fondo, no incluidas en la presente teoría.

En la figura 3 se muestra la evolución temporal del ancho superficial y la profundidad en el eje central del canal, relativos a sus valores iniciales. En el caso del ancho superficial, se observa que la respuesta del presente modelo, que es de tipo escalera debido a la naturaleza impulsiva del algoritmo de erosión, sigue la tendencia de la solución de K&P, y en ambos tratamientos se sobrestima la tasa experimental de crecimiento en los instantes iniciales, aunque el acuerdo mejor a medida que pasa el tiempo. Respecto de la profundidad, el presente modelo provee un mejor acuerdo con los resultados experimentales.

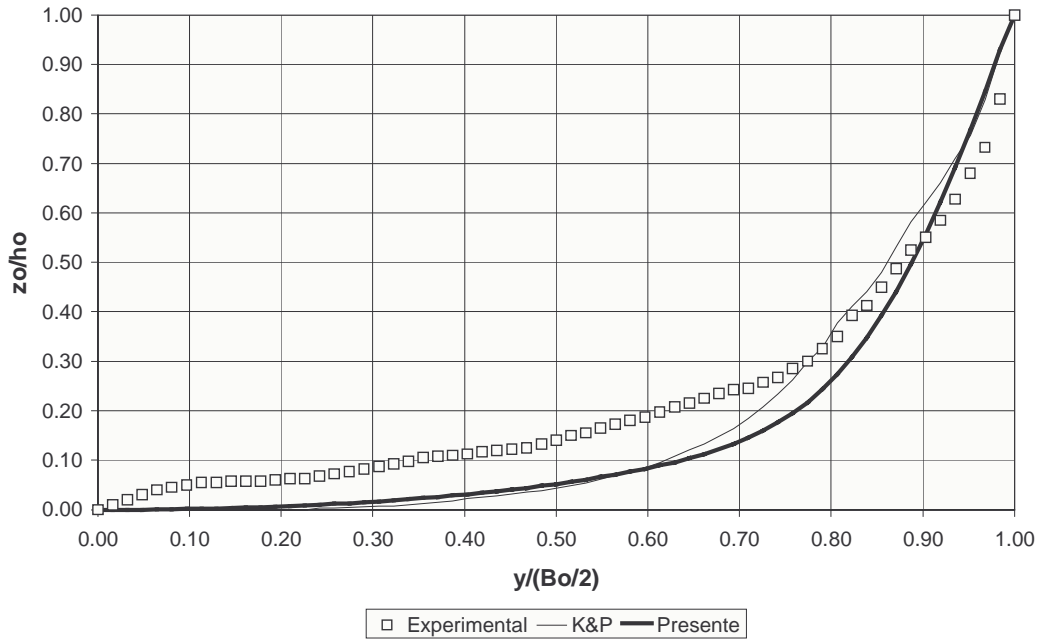


Figura 2.- Comparación entre resultados de los modelos K&P y presente con datos experimentales para la forma de la sección transversal de un canal recto, luego de 12 horas de iniciado el experimento.

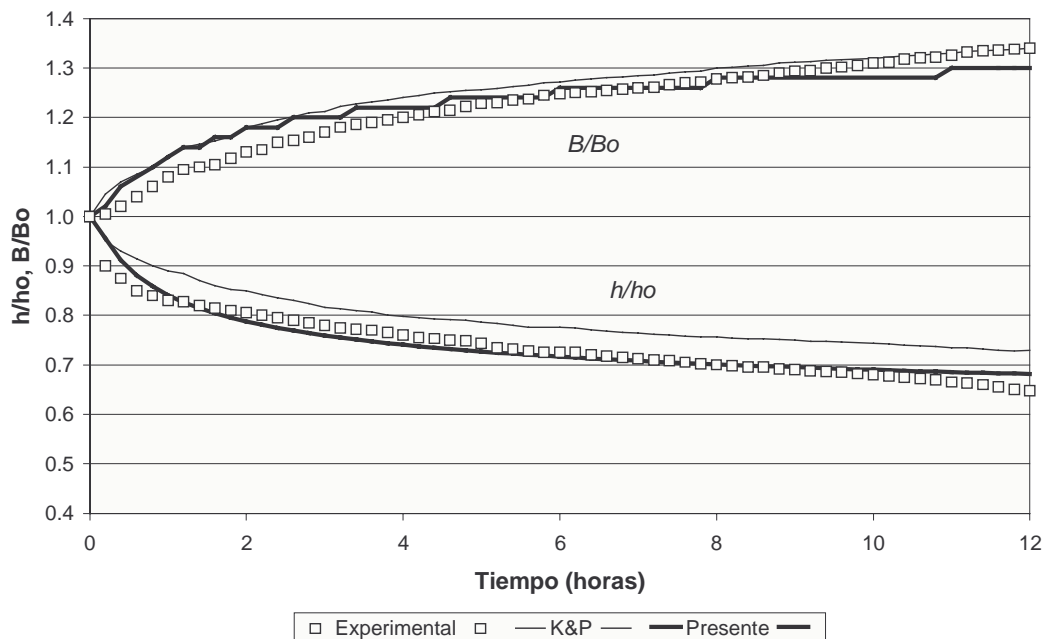


Figura 3.- Comparación entre resultados de los modelos K&P y presente con datos experimentales para el ancho superficial y la profundidad central del canal recto.

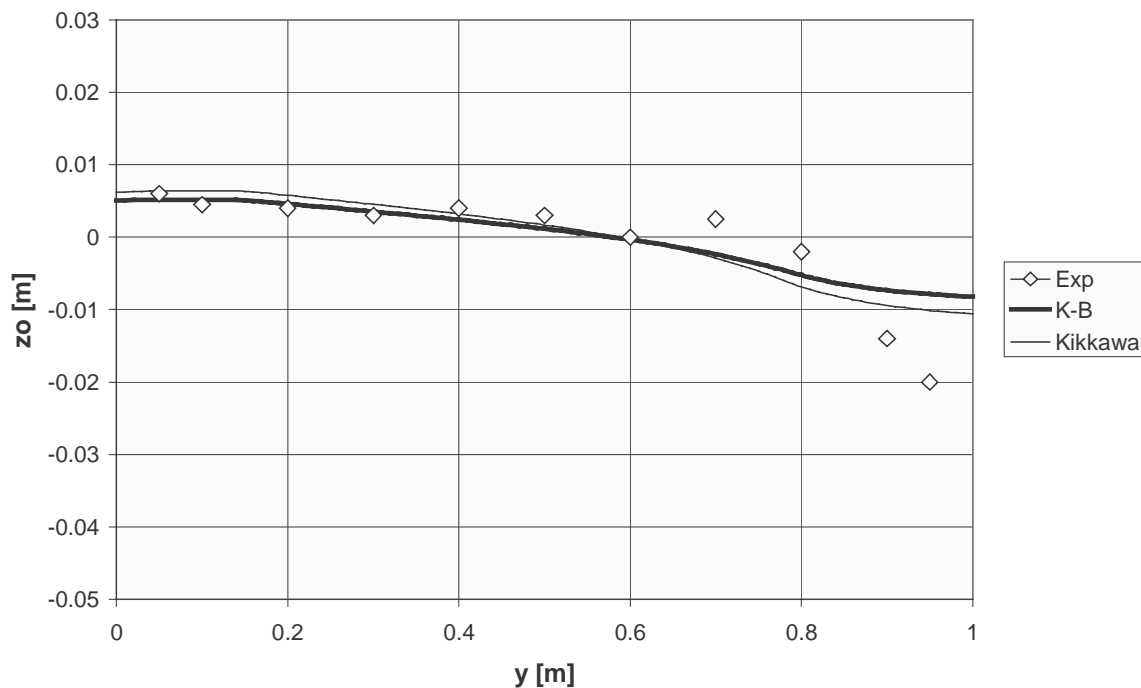
Canal curvo

El canal curvo tiene un ancho de 1 m, una pendiente longitudinal de 0,002, una profundidad inicial uniforme de 0,063 m, fondo de arena con diámetro medio 0,9 mm y radio de curvatura de 4,5 m. Se consideró el mismo coeficiente de fricción que para el caso recto, es decir, $\mu_c = 0,84$. El caudal es de 30 l/s. El dominio fue discretizado en 100 intervalos. El factor de peso

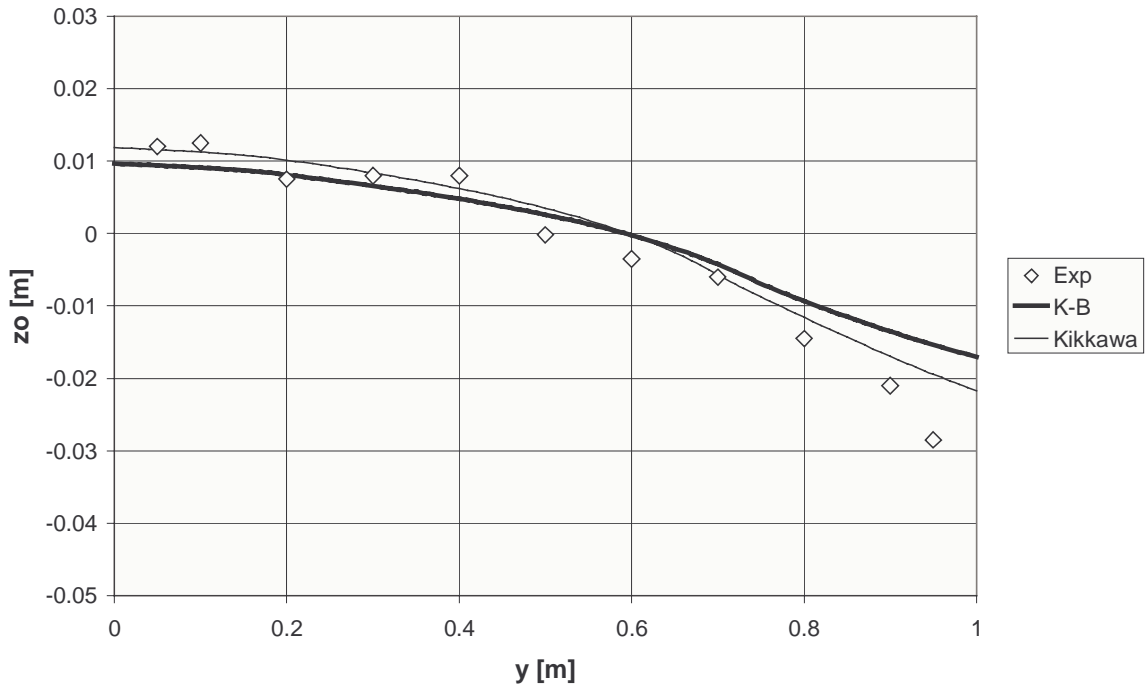
para este caso se tomó en $\theta = 1$, lo cual fue necesario para mantener la estabilidad numérica. El paso temporal fue de $\Delta t = 1$ seg. El espesor de la capa límite se tomó como $\delta B = 0,20$.

En las figuras 4a a 4c se muestra la comparación entre las presentes predicciones y los datos experimentales de Kikkawa et al. (1976). El acuerdo se considera satisfactorio, teniendo en cuenta que el modelo representa correctamente la tendencia de evolución y da el orden de magnitud correcto para el cambio de nivel. Las desviaciones cualitativas y cuantitativas más significativas ocurren cerca de la margen izquierda ($y = 1$). Dado que la solución es sensitiva al tratamiento implementado para la capa límite, a través de la máscara, es esperable una mejoría si se encarara una formulación más elaborada.

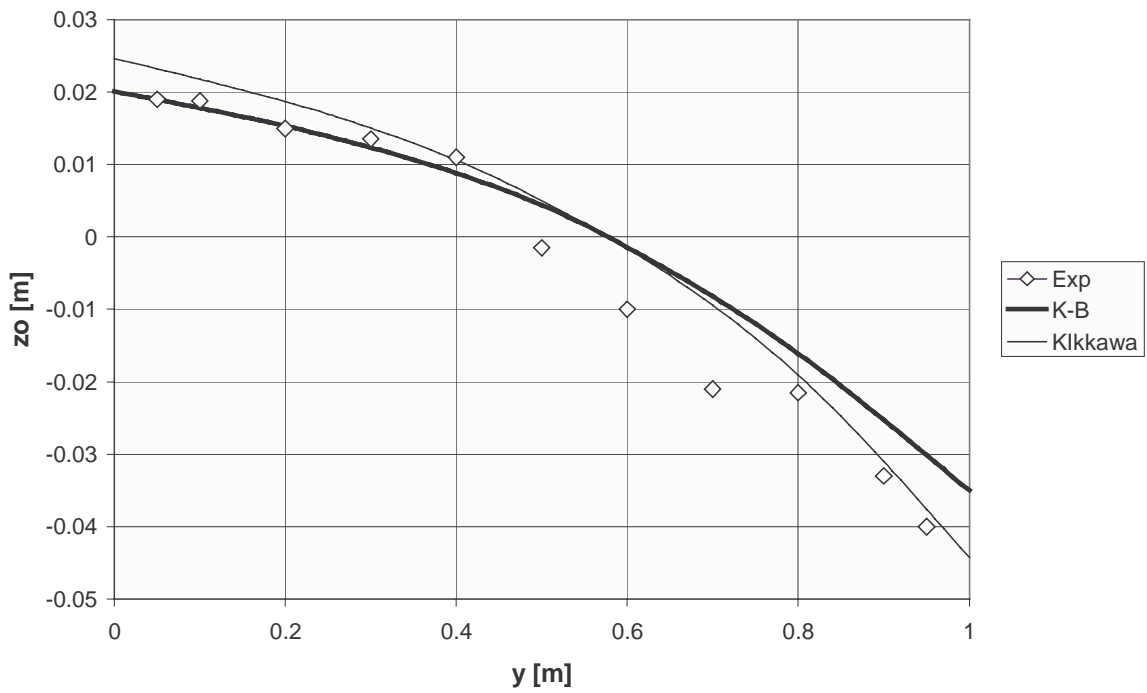
En las mismas figuras también se muestran los resultados obtenidos utilizando el modelo alternativo de corrientes secundarias de Kalkwijk & Booij (1986), identificados como K-B. Se observa que el nivel de acuerdo con los resultados experimentales es similar al del modelo de Kikkawa et al., indicando que el detalle de la distribución de la velocidad lateral no es significativo, a la luz de la precisión de los resultados experimentales.



a) 30 minutes



b) 1 hour



c) 2 hours

Figura 3: Comparación de resultados del modelo presente con datos experimentales para la sección transversal del canal curvo

CONCLUSIONES

El modelo de Kovacs-Parker, generalizado para incluir los efectos de la curvatura del canal y planteado de una manera que permite su resolución en forma directa, constituye una herramienta eficaz y teóricamente bien fundada para calcular el transporte de fondo. Se recomienda su utilización para reemplazar a las formulaciones empíricas usualmente empleadas.

Agradecimiento. Este estudio fue financiado a través de los subsidios PICT 12138 de la ANPCT e I010 de la UBA .

LISTA DE SÍMBOLOS

B :	ancho del canal
B_g :	factor geométrico que tiene en cuenta la inclinación del fondo
\hat{B} :	escala para el ancho del canal
d :	diámetro medio del grano
f :	factor de fricción de Darcy-Weisbach
h :	profundidad local de flujo
\hat{h} :	escala para la profundidad de agua
I_x :	pendiente longitudinal del flujo
L_{ox} :	escala espacial longitudinal del observador
L_{oy} :	escala espacial lateral del observador
M :	función moduladora ó ‘máscara’
\hat{p}' :	versor sobre el plano tangencial al fondo y normal a \hat{s}
\bar{q}_b :	tasa volumétrica de sedimento transportado
r :	radio de curvatura
R :	densidad relativa del grano
\hat{s} :	versor en la dirección longitudinal de movimiento
t :	coordenada temporal
\hat{t}_{v_p} :	versor en la dirección de la velocidad de la partícula
\hat{T} :	escala temporal del observador
\bar{u}_b :	velocidad del fluido
u_r :	componente lateral de la velocidad en el fondo
u_{bs} :	componente de \bar{u}_b en la dirección \hat{s}
u_{bp} :	componente de \bar{u}_b en la dirección \hat{p}'
U :	velocidad longitudinal del flujo, integrada en la vertical
U_* :	velocidad de corte
\bar{U} :	velocidad longitudinal del flujo, promediada sobre la sección transversal
\bar{U}_* :	velocidad de corte, promediada sobre la sección transversal
\hat{U} :	escala para la velocidad longitudinal de flujo

- \bar{v}_p : velocidad de la partícula
 y : coordenada lateral
 z_0 : elevación del fondo
 α : ángulo correspondiente a la pendiente longitudinal del canal
 δ : espesor de la capa límite en la margen
 ε : relación entre la componente longitudinal de la velocidad en el fondo y la velocidad media vertical
 ε_y : difusividad lateral
 $\hat{\varepsilon}_y$: escala para la difusividad lateral
 λ : porosidad del sedimento de fondo
 τ_b : tensión de corte en el fondo
 τ_C^* : tensión de corte adimensional crítica para iniciación del movimiento
 τ_{C0}^* : tensión de corte adimensional crítica para iniciación del movimiento sobre un fondo plano
 ξ : volumen de partículas que participa en el transporte de fondo
 ψ : ángulo entre el vector velocidad y la dirección \hat{s}
 ω : ángulo correspondiente a la pendiente lateral del canal
 μ_C : factor de fricción dinámica de Coulomb
*: variable adimensionalizada

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Engelund, F. (1974). "Flow and bed topography in channel bends", *Jr. Hydr. Div., ASCE*, **100**, HY11, November, 1631-1648.

Jain, S.C. (2001). *Open-Channel Flow*, John Wiley and Sons, New York, USA.

Kalkwijk, J.P.Th. & Booij, R. (1986). "Adaptation of secondary flow in nearly-horizontal flow", *Jr. Hydr. Research*, **24**, 1, 19-37.

Kikkawa, H., Ikeda, S. & Kitagawa, A. (1976) "Flow and Bed Topography in Curved Open Channels", *Journal of the Hydraulics Division*, **102**, HY9, September, 1327-1343.

Kovacs, A. & Parker, G. (1984). "A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels", *J. Fluid Mech.*, **267**, 153-183.

Menéndez, A.N. (2003). "Selection of optima mathematical models for fluvial problems", *Proceedings of Third IAHR Symposium on River, Coastal and Estuarine Morphodynamics*, Barcelona, Spain, Set. 1-5, 664-677.

Menéndez, A.N., Laciana, C.E., García, P.A. & Weber, J. (2005). "The Kovacs-Parker bed load transport model generalized to include curvature effects", under preparation.

Parker, G. (1983). Discussion to "Lateral Bed Load Transport on Side Slopes", S. Ikeda, *Jr. Hydr. Div., ASCE*, **110**, HY2, February, 197-199.

Raudkivi, A.J. (1990). *Loose Boundary Hydraulics*, 3rd Edition, Pergamon Press, New York, USA.

Wark, J.B., Samuels, P.G. & Ervine, D.A. (1990). “A practical method of estimating velocity and discharge in a compound channel”, *River Flood Hydraulics*, W.R. White, ed., John Wiley & Sons, Inc., Chichester, UK, 163-172.