

## MÉTODO DE GALERKIN DISCONTÍNUO PARA LA SOLUCIÓN DE LA EVOLUCIÓN DE UN LECHO EROSIONABLE

Pablo A. Tassi<sup>1,2</sup> & Carlos A. Vionnet<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Dept. Applied Mathematics. University of Twente, Enschede, The Netherlands; <sup>2</sup> Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina y CONICET.

### RESUMEN

La interacción lecho-flujo en cauces naturales ha despertado un gran interés en los últimos años, no solo desde el punto de vista científico sino también en relación con aplicaciones ingenieriles y ambientales. El objetivo de este trabajo es presentar la implementación del método de Galerkin discontinuo para la determinación del transporte de sedimento originado por un flujo modelado por las ecuaciones de aguas poco profundas. En los últimos años, el método de Galerkin discontinuo ha sido aplicado exitosamente en la aproximación de sistemas de leyes conservativas. El esquema resultante posee importantes ventajas sobre métodos clásicos de discretización como elementos finitos y volúmenes finitos, resultando conservativo a nivel local, propiedad de fundamental importancia en la aplicación de problemas relacionados con el transporte de sedimentos.

### ABSTRACT

Over last years, the understanding of how sand interacts with flow has become a major topic of interest, not only from academical point of view, but also from engineering and environmental applications. The aim of this work is to show the application of the space-discontinuous Galerkin finite-element method (DG) to compute the transport of sediment by a flow modeled by the shallow water equations. The success of DG in approximating system of conservative laws has attracted the attention of a good deal of researches in the last few years. The resulting scheme has several important advantages over classical methods such that finite elements or finite volume, for example it possesses a local conservation property, of paramount importance in problems related with sediment transport.

### INTRODUCCIÓN

La interacción lecho-flujo en cauces naturales ha despertado un gran interés en los últimos años, no solo desde el punto de vista científico sino también en relación con aplicaciones ingenieriles y ambientales. Dado que las ondas de arena son capaces de recuperar su amplitud luego del dragado (van Rijn 1993, Knaapen & Hulscher 2002), y su pasaje puede dejar al descubierto estructuras localizadas debajo del lecho del río como ser tuberías o túneles (Morelissen *et al.* 2003), un cabal entendimiento de los procesos erosivos relacionados con el transporte de sedimento en lechos arenosos resulta de una importancia singular para el ingeniero fluvial.

El objetivo de este trabajo es presentar la implementación del método de Galerkin discontinuo para la determinación del transporte de sedimento originado por un flujo modelado por las ecuaciones de aguas poco profundas. Al efecto, se resolvió el problema originalmente propuesto por Exner (van Rijn 1993), consistente en la determinación de la evolución de una perturbación originalmente simétrica bajo la influencia de un flujo estacionario, unidireccional, bajo la hipótesis de superficie libre rígida. Dicho problema puede extenderse al estudio de evolución y movilidad de barras y, eventualmente, de dunas.

En los últimos años, el método de Galerkin discontinuo ha sido aplicado exitosamente en la aproximación de sistemas de leyes conservativas (Cockburn 1999). El esquema resultante posee importantes ventajas: al igual que el método de elementos finitos, resulta mas conveniente que el método de diferencias finitas para la solución de problemas en dominios geométricos complejos. Por otra parte, el carácter local del método permite modificar su orden de precisión en forma directa por elemento, requiriendo solamente comunicación entre

elementos vecinos (Cockburn 1999).

## MODELO MATEMÁTICO

El modelo de evolución de la superficie del lecho debido al transporte de sedimentos por carga de fondo comprende las ecuaciones de aguas poco profundas y una ley de conservación de sedimento o ecuación de Exner (Henderson 1966), dando lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo hiperbólico, que en forma dimensional puede expresarse como

$$\partial_t h + \partial_x hu + \partial_y hv = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t hu + \partial_x (hu^2 + gh^2/2) + \partial_y (huv) = -gh \partial_x h_b \quad (2)$$

$$\partial_t hv + \partial_x (huv) + \partial_y (hv^2 + gh^2/2) = -gh \partial_y h_b \quad (3)$$

$$\partial_t h_b + n \partial_x q_x + n \partial_y q_y = 0 \quad (4)$$

En las ecuaciones (1-4), las derivadas parciales se indican mediante  $\partial_t$ , etc., siendo  $t$  el tiempo,  $\mathbf{u}=(u,v)$  las componentes de velocidad promediadas en la vertical a lo largo de las direcciones  $(x,y)$ ,  $h$  la profundidad del agua,  $h_b$  la elevación de la superficie del lecho, ambas medidas sobre un eje vertical alineado con la dirección de  $g$ , la aceleración de la gravedad, y el parámetro  $n=(1-p)^{-1}$  siendo  $p$  la porosidad del material granular no cohesivo que se supone constituye el lecho del río.

El cierre del sistema (1-4) se determina por una relación adicional que especifica la tasa de transporte volumétrico de fondo  $\mathbf{q}=(q_x, q_y)$  en las direcciones  $x$  e  $y$ , respectivamente. Asumiendo que el transporte de sedimentos se desarrolla siempre en la dirección de la velocidad del flujo, el vector  $\mathbf{q}$  se define, lejos de los puntos de estancamiento, mediante la expresión

$$\mathbf{q} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}| |\mathbf{q}|, \quad (5)$$

siendo  $|\mathbf{q}|$  la magnitud del transporte de sedimento en la dirección del flujo, asumido unidireccional, y bajo el supuesto de un lecho plano. Existe un gran número de funciones empíricas para la evaluación del transporte de sedimentos por carga de fondo (van Rijn 1993). En esta comunicación se considera la fórmula de transporte por carga de fondo propuesta por Grass (1981):

$$|\mathbf{q}| = \alpha |\mathbf{u}|^n, \quad (6)$$

donde  $\alpha$  es un coeficiente y  $n$  una constante positiva (típicamente entre  $1 \leq n \leq 5$ ). Es importante remarcar que  $\alpha$  puede ser función de la profundidad  $h$ , y de las propiedades del material que constituye el lecho del río, entre otros parámetros. Mediante (5) y (6), la fórmula de transporte de sedimento puede expresarse a través de

$$\mathbf{q} = \alpha |\mathbf{u}|^{n-1} \mathbf{u}. \quad (7)$$

De (7) se concluye que a menor valor del parámetro  $\alpha$ , menor es la interacción entre el lecho del río y el flujo o la intensidad del transporte. Por otra parte, se observa que el transporte predicho por (7) es nulo en los puntos de estancamiento del flujo.

## SOLUCIÓN NUMÉRICA

Las características mas sobresalientes del método de Galerkin discontinuo pueden ilustrarse considerando la solución numérica de la ecuación de advección lineal:

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0, \quad \text{en} \quad (0, L) \times (0, T), \quad (8)$$

donde  $a \in \Re$  y  $u_0 = u(x, 0)$ . Condiciones de borde típicas para la ecuación de advección lineal son (i) periódicas, o (ii) descarga unitaria:  $u(0, t) = u_l(t)$ ,  $a > 0$  o  $u(L, t) = u_r(t)$ ,  $a < 0$ . Por conveniencia, la ecuación (8) puede expresarse mediante la ecuación escalar hiperbólica genérica

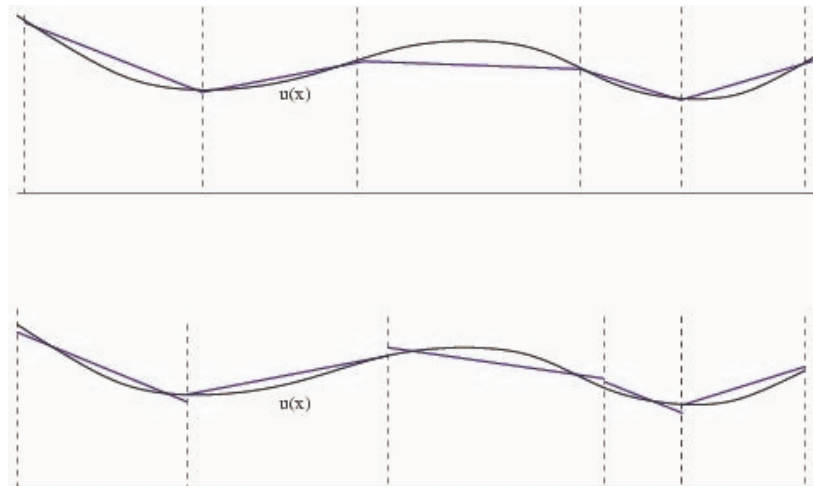
$$\partial_t u + \partial_x f = 0, \quad \text{en} \quad (0, L) \times (0, T), \quad (9)$$

donde en general el flujo  $f = f(u)$  y en particular  $f(u) = au$  para la ecuación de advección lineal.

Multiplicando (9) por una función arbitraria suave  $w = w(x)$ , integrando por partes en cada elemento aislado, y agregando luego la contribución de todos los elementos, se obtiene la siguiente formulación débil:

$$\sum_{k=1}^{N_{el}} \left\{ \int_{K_k} w \frac{du}{dt} dx + [f(x_{k+1}^-)w(x_{k+1}^-) - f(x_k^+)w(x_k^+)] - \int_{K_k} f(u) \partial_x w dx \right\} = 0, \quad (10)$$

donde  $w(x_{k+1}^-) = \lim_{x \uparrow x_{k+1}} w(x, t)$  y  $w(x_k^+) = \lim_{x \downarrow x_k} w(x, t)$ . Por lo tanto, los flujos se evalúan sobre las caras internas (puntos en el caso unidimensional) de cada elemento  $K_k$ . Luego las funciones suaves  $w$  son reemplazadas por funciones de prueba  $w_h$  pertenecientes al espacio de elementos finitos  $V_h$ , y la solución exacta  $u$  por la solución aproximada  $u_h$ . A diferencia del método de elementos finitos clásico, en el método de Galerkin discontinuo la variable  $u = u(x)$  se aproxima globalmente de forma discontinua y localmente en forma continua (linear a trozos, por ejemplo) para cada elemento. La Figura 1 ilustra la diferencia entre ambos métodos de discretización.



**Figura 1.**-Discretización de la variable  $u=u(x)$  mediante la aproximación por elementos finitos clásica –o continua- (arriba) y elementos finitos discontinuos (abajo).

Dado que se permite que la función  $u_h$  sea discontinua en los puntos  $x_{k+1}^-$ , el flujo  $f(x_{k+1}^-)$  se reemplaza por un flujo numérico, dependiente de los valores de  $u_h$  adyacentes al punto  $x_{k+1}^-$ , esto es, por la función  $h(u)_{k+1} = h(u(x_{k+1}^-), u(x_{k+1}^+))$ . Por lo tanto, la solución aproximada dada por la discretización aplicando el método de Galerkin discontinuo se define como la solución de la siguiente formulación débil:

$$\sum_{k=1}^{N_{el}} \left\{ \int_{K_k} w_h \frac{du_h}{dt} dx + [h(x_{k+1})w(x_{k+1}^-) - h(x_k)w(x_k^+)] - \int_{K_k} f(u_h) \partial_x w_h dx \right\} = 0,$$

La extensión a sistemas multidimensionales y de múltiples ecuaciones, si bien no es directa, sigue los lineamientos presentados anteriormente.

Adoptando una discretización espacial con polinomios de grado  $k$ , el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (1-4) se transforma en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Como caso particular, el empleo de aproximaciones constantes a trozos da lugar al esquema clásico de volúmenes finitos (Toro 1999). La comunicación interelemental se realiza mediante un flujo numérico, que debe ser especialmente diseñado para transferir la información adecuada. Debido a su precisión y eficiencia, se adoptó en este trabajo el flujo numérico HLLC (Toro 1999), en combinación con polinomios de grado  $k=1$ , resultando así un esquema de segundo orden.

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es integrado en el tiempo mediante el método TVD Runge Kutta de orden  $k+1$  (Cockburn 1999). La implementación de un operador de estabilización o limitador de pendiente aplicado en cada paso de tiempo intermedio garantiza soluciones monótonas en discontinuidades y gradientes abruptos.

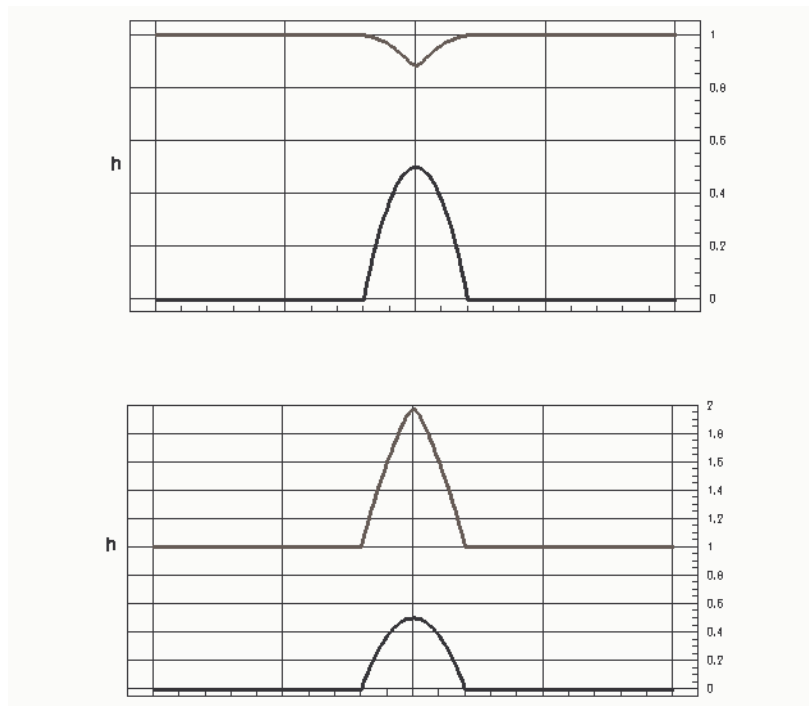
## RESULTADOS NUMÉRICOS

El primer ensayo numérico consiste en analizar el flujo, considerando el lecho rígido y sin transporte de material, sobre un obstáculo convexo suave, simétrico con respecto a su cresta, definido por un escalón de fondo de forma Gaussiana. En la Figura 2 se presenta una comparación entre la solución numérica y exacta para la elevación de la superficie de agua

para los casos subcrítico y supercrítico. Como se observa, para este caso existe un excelente acuerdo entre la solución exacta y numérica. Los resultados mostrados en la Tabla 1 evidencian que el esquema es, tal como se supuso inicialmente, de segundo orden y que el orden de convergencia para las variables  $h$  y  $hu$  es el mismo.

**Tabla 1.-** Flujo sobre un obstáculo aislado para el caso subcrítico. Error en norma-  $L^2$  luego de alcanzado el estado estacionario y resultados de convergencia en la profundidad de agua  $h$  y descarga unitaria  $hu$ . Malla uniforme con  $N \times N$  celdas.

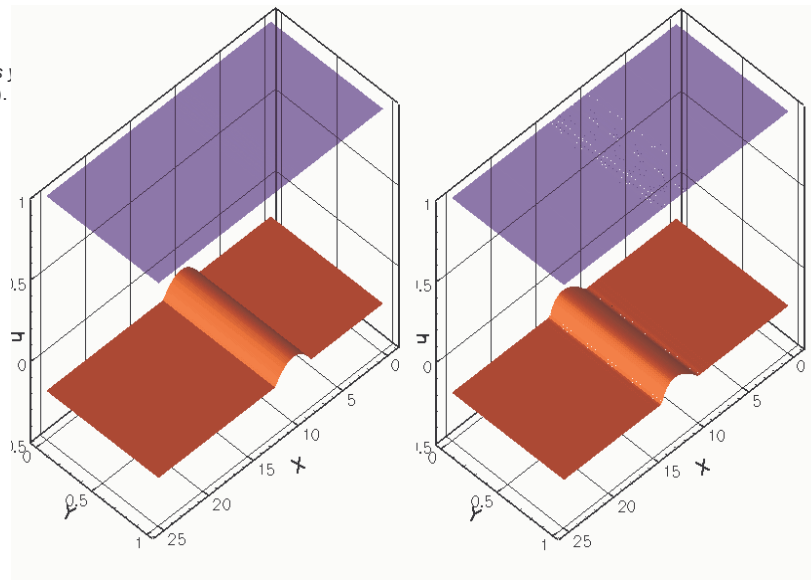
$N_{el}$	$h$ $L^2$ error	Orden $p$	$hu$ $L^2$ error	Orden $p$
$20 \times 1$	1.0598e-02		3.6266e-02	
$40 \times 1$	2.1903e-03	2.27	6.1527e-03	2.56
$80 \times 1$	4.1883e-04	2.39	1.0186e-03	2.59
$160 \times 1$	8.6768e-05	2.27	2.1468e-04	2.24



**Figura 2.-** Topografía del lecho y elevación de la superficie de agua para casos a) subcrítico y b) supercrítico (línea llena: solución numérica, línea a trozos: solución exacta).

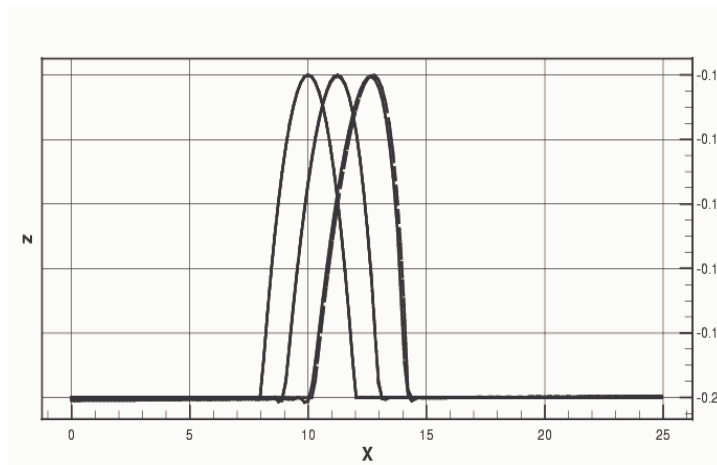
El siguiente ejemplo muestra la evolución del flujo y del lecho para el mismo problema del escalón de fondo Gaussiano presentado anteriormente, suponiendo ahora la presencia de transporte por carga de fondo para  $\alpha = 3$ , y  $n = 3$ . Se impusieron condiciones de borde no reflectantes, y en este caso, existe una solución asintótica conocida (Tassi 2005).

En el presente ensayo se implementó el flujo numérico HLLC para las ecuaciones (1-3) y el flujo de Lax-Friedrichs para la ecuación de evolución del lecho (4) (Toro 1999). La implementación de flujos numéricos más elaborados se encuentra en etapa de desarrollo. En la Figura 3 se aprecia una proyección 3D de la condición inicial,  $t = 0$ , y del estado final de la simulación,  $t = 20$ , cuyos detalle se observa en los cortes de la Figura 4. Puede verse que ambas



soluciones son prácticamente indistinguibles una de otra.

**Figura 3.-** Elevación de la superficie de agua y del lecho para la evolución de un obstáculo aislado. Izq.: cond. inicial. Der.: solución a  $t=20$ .



**Figura 4.-** Detalle de la solución numérica (línea sólida) y solución asintótica (línea a trozos) para la evolución de un obstáculo aislado a tiempo  $t=0, 10, 20$ .

## CONCLUSIONES

En los últimos años, el método de Galerkin discontinuo surgió como una alternativa robusta a métodos clásicos tales como volúmenes finitos para la resolución de problemas hiperbólicos. El presente trabajo es potencialmente extensible a problemas más complejos, aunque en esta primera etapa, el desarrollo se limitó a la aplicación del método para estudiar la evolución de un lecho erosionable en un canal extenso mediante la solución numérica de las ecuaciones de aguas poco profundas acopladas a la ley de conservación del material sólido. Al efecto, la performance en esta etapa de desarrollo del código computacional fue analizada mediante la comparación con soluciones exactas y asintóticas para un caso con fondo rígido, en presencia de una perturbación del lecho y sin transporte, y para el mismo caso con lecho erosionable y en presencia de transporte de sedimentos. En ambos casos se encontró que el código produce soluciones altamente satisfactorias, y notablemente suaves aún en zonas con gradientes abruptos. Esta última propiedad es una de las ventajas del método en la resolución de problemas hiperbólicos, los cuales pueden exhibir soluciones no continuas, como ser resaltos hidráulicos, u ondas de frente abrupto en el lecho producidas ante una carga súbita de sedimentos aguas arriba.

**Agradecimiento.** :Los autores agradecen el financiamiento otorgado por CONICET y por el programa de becas Alfan. Los desarrollos computacionales fueron realizados en la University of Twente (Holanda) bajo supervisión del dr.ir. O. Bokhove, cuyo apoyo es agradecido.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

**Cockburn, B.** (1999), Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems. In *High-Order Methods for Computational Physics*, ed. T. Barth and H. Deconinck, 69--224, **9**.

**Grass, A. J.** (1981) Sediment transport by waves and currents. SERC London Cent. Mar. Technology, report No: FL29.

**Henderson, F.M.** (1966), *Open channel flow*. Macmillan, New York.

**Knaapen, M.A.F. & Hulscher S.J.M.H.** (2002), Regeneration of sand waves after dredging. *Coastal Engineering*, 46(4): 277-289.

**Morelissen, R., Hulscher S.J.M.H., Knaapen M.A.F., Németh A.A. & Bijker R.** (2003), Mathematical modelling of sand wave migration and the interaction with pipelines. *Coastal Engineering*, 48: 197-209.

**Tassi P.** (2005), Numerical modelling of flow and morphological evolution with discontinuous Galerkin method. Internal report. Dept. Applied Mathematics (University of Twente) and CENEHA (FICH-UNL).

**Toro, E.** (1999), *Shock capturing methods for free-surface flows*. Wiley, Toronto, 309 pp.

**Van Rijn, L.C.** (1993), *Principles of sediment transport in rivers, estuaries and coastal seas*. Aqua Pub. The Netherlands.